



Centro de Investigación en Matemáticas

Maestría en Probabilidad y Estadística

*UNA APLICACIÓN DE TEORÍA DE CATÁSTROFES
EN SALUD PÚBLICA*

Tesis que presenta

Alejandro Quiroz Zárate

Para obtener el grado de

Maestría en Ciencias con especialidad en

Probabilidad y Estadística

Director de tesis:

Dra. Graciela María de Dolores González Farías

junio 2007, Guanajuato, Gto

Una aplicación de teoría de catástrofes en Salud Pública

En memoria de:

Fermín Zárate Zárate †

Genaro Quiroz Machado †

*"...mathematicians do not destroy the obstacles
with which their science is spiked,
but simply push them towards its boundary.
May these particular obstacles be pushed
as far away as possible from this boundary,
up to the domain of the unconscious and irrational."*

J. H. Poincaré

Agradecimientos

A mi familia. Por su apoyo en todo momento.

A mi asesora, la Dra. Graciela González Farías por su paciencia, guía, orientación, apoyo y hospitalidad.

Al Dr. Esteban Ramos Peña, por su colaboración en la elaboración de este trabajo.

A mis sinodales. Por sus valiosos consejos en la elaboración final de este trabajo.

Al CONACyT. Por la beca de maestría con registro 201910.

A todos mis profesores de la maestría.

A Cristina Gorrostieta Hurtado, por su apoyo, compañía, paciencia y cariño.

A todos mis amigos.

Indice

1	Introducción	1
2	Teoría de Catástrofes: La necesidad matemática de describir transiciones discontinuas	5
2.1	Teoría elemental de catástrofes	7
2.1.1	Algunas definiciones	8
2.1.2	Teoría de Morse.	9
2.1.3	El Teorema de Mather	17
2.1.4	El Teorema de Thom	23
3	Modelando estocásticamente una catástrofe	27
3.1	Teoría de catástrofes: Un marco para modelos dinámicos no lineales	28
3.2	Un vía para la conceptualización estocástica de los modelos catástrofe	31
3.2.1	Una catástrofe estocástica	32
3.2.2	La liga de Cobb	37
3.2.3	Los principales grupos de densidades de la familia multimodal exponencial.	38

3.3	Estimación de las densidades liga	41
3.3.1	Estimación mediante momentos	41
3.3.2	Estimación mediante máxima verosimilitud	49
3.4	Selección de variables	54
3.4.1	Selección de las variables significativas en el modelo catástrofe "cusp"	55
4	Una aplicación de teoría de catástrofes a un problema de salud pública	59
4.1	Un análisis estadístico, dentro del contexto de teoría de catástrofes, de un problema de salud pública del estado de Nuevo León	61
4.1.1	Planteamiento del problema	62
4.1.2	Análisis descriptivo de los datos	63
4.1.3	Estimación de una superficie de catástrofe	72
4.1.4	Resultados	76
4.1.5	Conclusión de los resultados obtenidos	85
4.2	Un análisis alternativo, bajo un contexto clásico estadístico	93
4.2.1	Análisis para el año 2000	94
4.2.2	Análisis para el año 2005	97
4.2.3	Conclusiones del análisis	100
4.2.4	Comparación del rendimiento predictivo con los modelos catástrofe	100
5	Conclusión	107
	Bibliografía	109

Indice

Lista de Figuras

2.1	La superficie de catástrofe "fold", $F(x, u) = x^3 + xu$, que es el desdoblamiento universal de $f(x) = x^3$	10
2.2	Ejemplo de dos funciones que no son equivalentes, $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^3 + \varepsilon x$ con $\varepsilon \neq 0$	13
3.1	Gráfica que ejemplifica los puntos catástrofe de la ecuación diferencial $\dot{y} = x + 3y - y^3$. En este caso los puntos catástrofe son $(2, -1)$ y $(2, 1)$	29
3.2	Superficie de catástrofe "cusp", que en su forma canónica es: $0 = \alpha + \beta z - z^3$	46
3.3	Superficie de catástrofe estimada mediante el método de momentos.	50
3.4	Datos del experimento realizado al cual se le ajusto una superficie de catástrofe. Estos datos fueron presentados en Cobb (1980).	51
4.1	Histograma de las observaciones Y para el año 2005. En éste se refleja el comportamiento asimétrico que se había detectado en las tablas de los cuantiles.	66
4.2	Histograma de las observaciones X para el año 2005. En éste se refleja el comportamiento asimétrico que se había detectado en las tablas de los cuantiles.	67

4.3	Histograma de las observaciones Y para el año 2000. En éste se refleja el comportamiento asimétrico que se había detectado en las tablas de los cuantiles.	69
4.4	Histograma de las observaciones X para el año 2000. En éste se refleja el comportamiento asimétrico que se había detectado en las tablas de los cuantiles.	70
4.5	Gráfica cuantil-cuantil para los datos del año 2005, del ajuste de la densidad G_3 .	72
4.6	Gráfica de la densidad ajustada para los datos del año 2005, del ajuste de la densidad G_3 .	73
4.7	Gráfica cuantil-cuantil para los datos del año 2000, del ajuste de la densidad G_3 .	74
4.8	Gráfica de la densidad ajustada para los datos del año 2000, del ajuste de la densidad G_3 .	75
4.9	Proyección catástrofe del modelo G_1 para los datos del 2000, en donde únicamente se considera en el modelo la variable catástrofe X .	78
4.10	Proyección catástrofe del modelo G_2 para los datos del 2000, en donde únicamente se considera en el modelo la variable catástrofe X .	79
4.11	Proyección catástrofe del modelo G_3 para los datos del 2000, en donde únicamente se considera en el modelo la variable catástrofe X .	80
4.12	Proyección catástrofe del modelo G_1 para los datos del 2000, en donde se considera en el modelo la acción conjunta de las tres variables control que resultaron significativas: CA , EA y X .	82

4.13	Proyección catástrofe del modelo G_2 para los datos del 2000, en donde se considera en el modelo la acción conjunta de las tres variables control que resultaron significativas: CA , EA y X	83
4.14	Proyección catástrofe del modelo G_3 para los datos del 2000, en donde se considera en el modelo la acción conjunta de las tres variables control que resultaron significativas: CA , EA y X	84
4.15	Proyección catástrofe del modelo G_1 para los datos del 2005, en donde únicamente se considera en el modelo la variable catástrofe X	86
4.16	Proyección catástrofe del modelo G_2 para los datos del 2005, en donde únicamente se considera en el modelo la variable catástrofe X	87
4.17	Proyección catástrofe del modelo G_3 para los datos del 2005, en donde únicamente se considera en el modelo la variable catástrofe X	88
4.18	Gráfica $Q - Q$ de los residuales devianza para el caso del año 2000.	95
4.19	Gráfica del modelo lineal generalizado para el año 2000.	96
4.20	Gráfica $Q - Q$ de los residuales devianza para el caso del año 2005.	98
4.21	Gráfica del modelo lineal generalizado para el año 2005.	99
4.22	Gráfica en la que se presentan los datos para el año 2005 junto con las predicciones realizadas con G_2 y MLG	102
4.23	Gráfica en la que se presentan los datos para el año 2000 junto con las predicciones realizadas con G_1 y MLG	104
4.24	Gráfica en la que se presentan los datos para el año 2000 junto con las predicciones realizadas con G_2 y MLG	105

Capítulo 1

Introducción

La descripción matemática del mundo que nos rodea depende de una sutil frontera entre el comportamiento continuo y el discontinuo. El análisis de los cambios de forma de los fenómenos que nos rodean, ha sido uno de los problemas centrales del hombre: ¿cómo modelarlos?.

Si el cambio de forma fuese a tener lugar en todo tiempo y lugar de una manera estable y bien definida, el problema del análisis de forma sería sencillo, se reduciría a estudiar el cambio que presenta cierto sistema o fenómeno en una vecindad de cualquier punto, para establecer un algoritmo de predicción del mismo; mas esta no es la realidad.

Existen cambios abruptos en la naturaleza, cambios "inesperados" en ciertas ocasiones (inesperados, relativo a nuestra ignorancia como observadores), los cuáles no resultan extraños, basta observar cuidadosamente para ver que en realidad estamos rodeados de tales tipos de eventos, el estudio de estabilidad de los barcos, el comportamiento de la compleja actividad cerebral, el análisis de la adopción de nuevas tecnologías disponibles en el mercado, son ejemplos de estos.

Este trabajo describe una de las formas de modelar fenómenos que presentan cambios discontinuos de fase: La teoría de catástrofes. Nos da la capacidad de modelar cambios repentinos en respuesta a cambios graduales bajo el contexto de sistemas dinámicos no lineales, en conjunto con su representación estocástica, y será nuestro objeto de estudio en este trabajo.

Esta tesis se estructura de la siguiente manera. En el capítulo 2 se proporciona de manera general una introducción a la vasta teoría de catástrofes, su nacimiento y desarrollo. Se discuten dos resultados importantes y se enuncia el resultado que para este trabajo, resulta fundamental: el teorema de Thom, sobre la clasificación de las superficies de catástrofes. En el capítulo 3 se establecen dos puentes conceptuales fundamentales para realizar inferencia estadística sobre modelos dinámicos no lineales. Se establece la conceptualización de los modelos catástrofe como una ecuación diferencial estocástica. Se muestra la solución estacionaria de esta ecuación diferencial, y se establece el cómo esta solución sirve para establecer las propiedades estadísticas sobre un modelo catástrofe, en particular estimación de parámetros e inferencia. Se discute una forma de elegir a las variables control que integran el modelo catástrofe. En el capítulo 4 se presenta una aplicación de esta teoría a un problema de salud pública en el estado de Nuevo León. Los datos están conformados por dos encuestas realizadas a 100 familias en los años 2000 y 2005, con el objetivo de mantener un seguimiento del impacto de ciertas variables socio-económicas en un aspecto del estado nutricional de estas familias. Se realizó un análisis de los datos mediante esquema de modelación clásica, en particular, con modelos lineales generalizados. Se propone una manera de comparar los modelos catástrofe con los modelos lineales generalizados mediante el poder predictivo de ambos. Además se propone una metodología para construir intervalos de con-

fianza tipo bootstrap de los parámetros en los modelos catástrofe. Con esto se pretende dar una descripción global de los pros y contras que la teoría de catástrofes ofrece como una alternativa de modelación adicional a los modelos estadísticos. Al incorporar el ingrediente estocástico y al permitir además, la valoración de la presencia de cambio drásticos en la variable respuesta, que no corresponden a comportamientos en la media sino en la moda, se genera una herramienta de apoyo valiosa en la toma de decisiones.

Capítulo 2

Teoría de Catástrofes: La necesidad matemática de describir transiciones discontinuas

La física clásica desde Newton hasta la relatividad general, es esencialmente teoría y análisis sobre fenómenos que describen un comportamiento suave, gradual en una diversidad de contextos. Hasta ese instante histórico, ninguna descripción o teoría matemática permitía de alguna manera describir fenómenos que presentan cambios abruptos o con transiciones de fase discontinuas. Estos fenómenos no son extraños en la naturaleza, por ejemplo, los esfuerzos entre dos metales que sufren fricción entre si, llegarán a un momento de quiebre o de fundición, la actividad cerebral a nivel neuronal, la resistencia de puentes ante esfuerzos o ante terremotos. Muchos de estos fenómenos todavía desafían al análisis matemático.

La teoría de catástrofes es la conjunción de diversas áreas de la matemática: topología,

geometría y sistemas dinámicos, particularmente en el estudio de singularidades y bifurcaciones. En los últimos cuarenta años, la teoría de catástrofes ha alcanzado un nivel muy sofisticado principalmente debido a los trabajos de H. Whitney, 1955, en singularidades, R. Thom, 1959, en la clasificación de los 7 tipos distintos de catástrofes y en J. Mather, 1965. Estos trabajos, tienen sus orígenes en los trabajos de ecuaciones diferenciales de J. H. Poincaré, 1879, que fueron desarrollados y llevados hasta el establecimiento de la teoría de bifurcaciones por A. Androv, 1933.[1],[11].

El primer encuentro de la teoría de catástrofes con la prensa occidental ocurrió a finales de los años '60. Reportajes en revistas la publicitaban como la revolución en matemáticas, comparable con el invento del cálculo integral y diferencial de Newton. Teoría de catástrofes proveía el respaldo teórico y aportaba un método universal para el estudio de transiciones abruptas, discontinuas.[1]

A principios de los '70, la teoría de catástrofes rápidamente se convirtió en un área de moda y muy ampliamente publicitada. Se considera al matemático francés René Thom el fundador de la misma. Thom expuso sus teorías en 1972, en el libro *Stabilité Structurelle et Morphogénèse*. Los orígenes de la teoría de catástrofes yacen sobre las siguientes teorías importantes en la matemática moderna: la teoría de Whitney acerca de singularidades y funciones "suaves", y las teorías de Poincaré y Andronov sobre bifurcaciones y sistemas dinámicos. [10], [11].

2.1 Teoría elemental de catástrofes

El objetivo desde la perspectiva matemática es contar con una herramienta que permita describir los comportamientos abruptos o con cambios de fase de manera discontinua. La teoría de catástrofes permite dicho análisis. Bajo el contexto que nos interesa explorar, fijaremos nuestra atención en uno de los principales resultados conocido como, el Teorema de Thom. Se presenta una perspectiva histórica del cómo se fueron concibiendo e integrando los resultados que sustentan a este teorema fundamental en la teoría de catástrofes.

El desarrollo de nuestra herramienta matemática se puede concebir como el estudio y clasificación de las singularidades degeneradas. La manera en la que abordaremos dicho estudio será aproximar las funciones que presentan singularidades degeneradas mediante familias de funciones que presentan únicamente singularidades no-degeneradas, por ello se presenta primero la teoría de singularidades de Morse, que da el estudio de funciones con singularidades no-degeneradas. Después, estos resultados se generalizan a familias o grupos de funciones con singularidades no-degeneradas. Una vez establecida la forma en la que se agrupan las funciones con singularidades no-degeneradas, surge la necesidad de establecer la noción de “similaridad” o “cercanía” entre tales familias de funciones. El *Teorema de Morse* representa el resultado principal en donde se definen en forma natural dichas relaciones. Este teorema es fundamental para entender el cómo se establece el *Teorema de Clasificación de Catástrofes de Thom*. El Teorema de Morse nos provee de una cierta familia de funciones con singularidades no-degeneradas que es densa y abierta en $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Esto será de gran utilidad, pues es a partir de esta familia de funciones que se aproxima a las funciones con singularidades degeneradas.

Una vez establecida la maquinaria para la clasificación de las familias de funciones con singularidades no-degeneradas, se enuncia otro de los resultados que permiten establecer de manera “natural” el teorema de la clasificación de catástrofes de Thom: *El Teorema de Mather*. Este teorema nos da una manera de “desdoblar” nuestra función con singularidades degeneradas, en una familia de funciones con singularidades no-degeneradas de manera “canónica”. A partir de este resultado podemos enunciar el *Teorema de Clasificación de Catástrofes de Thom*.

El propósito de esta sección es introducir de manera general los conceptos matemáticos fundamentales para el entendimiento de teoría de catástrofes.

2.1.1 Algunas definiciones

Enunciamos algunas definiciones que nos serán de utilidad en las siguientes secciones.

Definición 2.1 Sea F tal que $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Decimos que $F \in C^\infty$ si todas las derivadas parciales de todos los ordenes de F existen y son continuas.

A partir de la anterior tenemos:

Definición 2.2 Sea F tal que $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Decimos que $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es un punto regular de F si la derivada en el punto x_0 , no se anula

$$DF(x_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(x_0) \right) \neq 0.$$

Definición 2.3 Sea F tal que $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Decimos que F tiene una singularidad (o punto crítico) en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si la derivada en el punto x_0 , se anula

$$DF(x_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(x_0) \right) = 0.$$

Finalmente concluiremos esta pequeña parte con una definición que nos será de gran utilidad en el resto de esta sección.

Definición 2.4 Sea $F \in C^\infty$ tal que $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}$. Denotemos a los puntos en \mathbb{R}^r por $u \equiv (u_1, \dots, u_r)$ y a los puntos en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ por $(x, u) \equiv (x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r)$. Entonces para cada u fijo, se obtiene una función C^∞

$$F_u(x) = F(x, u) \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

En este sentido, se interpreta a F como una familia C^∞ de r – parámetros de C^∞ de funciones de \mathbb{R}^n a \mathbb{R} . Las variables (u_1, \dots, u_r) son llamadas los parámetros de la familia.

Ilustremos esta definición mediante el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.5 $F(x, u) = x^3 + xu$ es una familia de 1 – parámetro con $F_0(x) = x^3$ cuando $u = 0$

[2].

2.1.2 Teoría de Morse.

La teoría de catástrofes generaliza algunos resultados clásicos sobre singularidades debidos a Whitney y a Morse.

Al estudiar singularidades existen tres ideas básicas: estabilidad, clasificación y "genericity". Para comprender mejor estas ideas, recordemos que en \mathbb{R}^n las bolas abiertas, $B_\delta(x_0)$, con centro en x_0 y radio δ definen una topología [2].

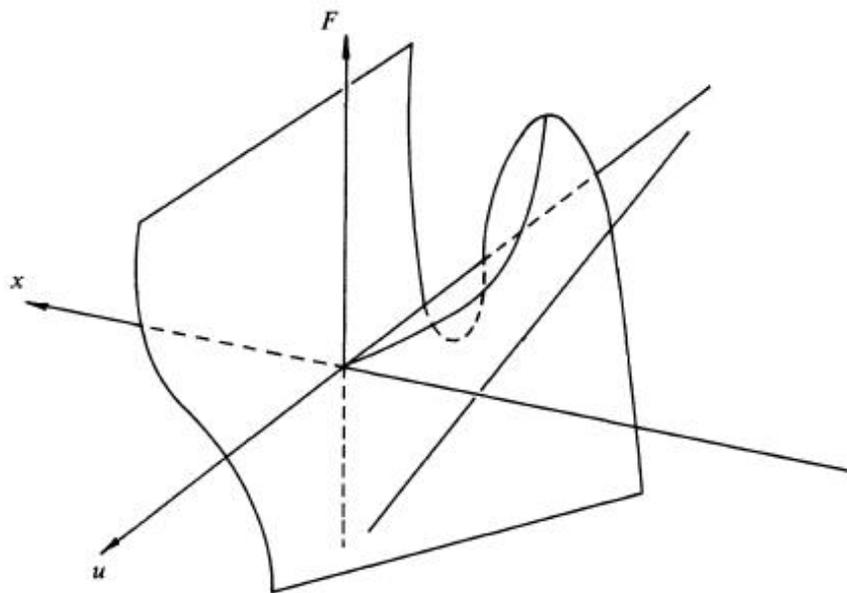


Figura 2.1: La superficie de catástrofe "fold", $F(x, u) = x^3 + xu$, que es el desdoblamiento universal de $f(x) = x^3$.

Definición 2.6 Decimos que un conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ con $x_0 \in U$ es una **vecindad** de x_0 si existe una $B_\delta(x_0)$ tal que

$$B_\delta(x_0) \subset U.$$

Decimos que U es una **vecindad abierta** si es una vecindad de todos sus puntos.

Lo anterior lo definimos de manera formal para introducir las siguientes definiciones.

Definición 2.7 Una propiedad $P(x)$ se cumple "cerca" de x_0 si existe una vecindad U de x_0 tal que $P(x)$ es cierta cuando $x \in U$.

Definición 2.8 Sea $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. y sean U, V conjuntos de \mathbb{R}^n . Se dice que $\phi : U \rightarrow V$ es un **difeomorfismo** si ϕ es tal que es C^∞ y si además es invertible.

El primer resultado clásico importante concierne al comportamiento de la función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ cerca de un punto regular x_0 .

Teorema 2.9 Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $Df(x_0) \neq 0$ (i.e., si x_0 es un punto regular de f) entonces en alguna vecindad U de x_0 existe un difeomorfismo $\phi : U \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$f \circ \phi(x_1, \dots, x_n) = \pi(x_1, \dots, x_n) = x_1$$

[2].

Para ejemplificar la implicación del teorema analicemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.10 Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2,$$

analicemos a f en $x_0 = (0, 0)$. Se tiene que

$$Df(x)|_{x_0} = (1, 2x_2)|_{x_0} = (1, 0) \neq \mathbf{0}.$$

Por lo que el teorema anterior nos garantiza que para f existe una ϕ (un cambio de coordenadas) de tal forma que localmente alrededor de x_0 podemos ver a f como una función lineal, como un plano "plano". Si definimos a $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$\phi(x_1, x_2) = (x_1 - x_2^2, x_2)$$

se tiene que

$$\begin{aligned} f \circ \phi(x_1, x_2) &= f(x_1 - x_2^2, x_2) = x_1 - x_2^2 + x_2^2 \\ &= x_1 \end{aligned}$$

[2].

2.1. TEORÍA ELEMENTAL DE CATÁSTROFES

Debido a que, en una vecindad de un punto regular de una función este "cambio de coordenadas" no afecta de manera cualitativa a la función, esto es, no cambia las singularidades de la función, este teorema de "cambio de coordenadas" da cabida a una clasificación de las funciones en la cercanía de sus puntos regulares. Para esto se debe establecer una relación de equivalencia, de tal manera que se puedan comparar funciones, puesto que estamos interesados en clasificar, por lo que es necesario establecer que entendemos por equivalencia de funciones.

Definición 2.11 *Dos funciones C^∞ $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ son **equivalentes** si existen dos difeomorfismos $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $\psi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ de tal forma que*

$$\psi \circ f = g \circ \phi.$$

En otras palabras, dos funciones son iguales en "coordenadas convenientes" si cualitativamente se ven iguales. Si trasladamos esta definición al contexto de álgebra lineal se tiene que dos transformaciones lineales son equivalentes, si son las mismas bajo una base "adecuada". Esta definición concuerda con nuestro sentido común. Pensar en igualdad es simple, pero como explicar diferencias es un poco mas complejo. ¿qué pasa con las funciones que son diferentes?, ¿qué es lo que falla localmente alrededor de un punto x_0 en particular?

Dos funciones serán cualitativamente diferentes, por ejemplo $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^3 + \varepsilon x$ en donde $\varepsilon \neq 0$, debido a que g tiene dos o ningún punto crítico mientras que f siempre tiene 1, por lo que no existen difeomorfismos (transformaciones), de tal manera que cerca del origen f y g no son iguales localmente.

A partir de lo anterior se observa que una posible causa para que dos funciones no sean equivalentes es que presenten un comportamiento distinto respecto al número de singulari-

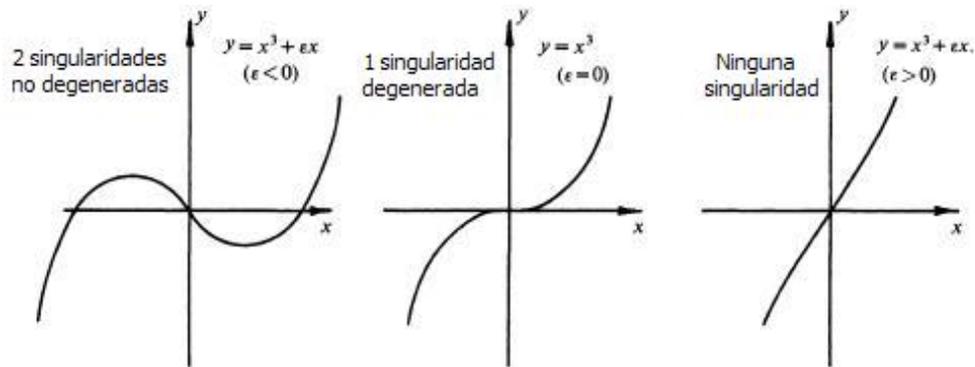


Figura 2.2: Ejemplo de dos funciones que no son equivalentes, $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^3 + \varepsilon x$ con $\varepsilon \neq 0$.

dades alrededor de un punto x_0 y al tipo de singularidades, degeneradas y no degeneradas.

Consideremos ahora una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con una singularidad en $x_0 \in \mathbb{R}^n$

Definición 2.12 La función f tiene una **singularidad no degenerada** en x_0 si el Hessiano es no singular, esto es

$$\left| \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (x_0) \right] \right| \neq 0.$$

Por otro lado si se tiene que

$$\left| \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (x_0) \right] \right| = 0$$

se dice que f tiene una **singularidad degenerada** en x_0 .

Con todo lo anterior podemos enunciar el segundo resultado principal, de la teoría clásica de Morse.

Teorema 2.13 Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, si x_0 es una singularidad no degenerada de f entonces para algún $k \leq n$, f es equivalente en una vecindad de x_0 a la función

$$g(x_1, \dots, x_n) = -(x_1^2 + \dots + x_k^2) + (x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2).$$

Demostración:

Por hipótesis se tiene que alrededor de x_0 ,

$$H = \left| \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (x_0) \right] \right| \neq 0,$$

por lo que existe una matriz P invertible tal que

$$P^T H P (1, 1) = \sigma_1 = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}.$$

Sea $y = (y_1, \dots, y_n)$ el sistema de coordenadas en \mathbb{R}^n obtenido por la transformación P .

Tenemos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} (x_0) = \sigma_1. \tag{2.1}$$

Ahora, f restringida a Y_1 en la U - vecindad del sistema de coordenada y_1 evaluado en $y_1 = x_0$ tiene un punto crítico no degenerado, que es máximo o mínimo dependiendo del signo de (2.1). En particular si restringimos a y_1 en $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ se tiene un comportamiento estrictamente cóncavo o convexo, para un $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. Habiendo escogido a ε , escogemos a $\eta > 0$ de tal manera que para

$$|y_i| \leq \eta, i = 2, \dots, n$$

la restricción de f en el intervalo $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ esta bien definida y además se tiene un comportamiento estrictamente cóncavo o convexo con un punto interior no degenerado. La localización de este punto crítico

$$y_1 = y_{1,critico},$$

esta dado implícitamente por

$$g(y_{1,critico}, y_2, \dots, y_n) := \frac{\partial}{\partial y_1} f(y_{1,critico}, y_2, \dots, y_n) = 0.$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial y_1} g = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} f \neq 0$$

para

$$|y_1| \leq \varepsilon \text{ y } |y_i| \leq \eta, i = 2, \dots, n$$

podemos expresar a $y_{1,critico} = y_{1,critico}(y_2, \dots, y_n)$ como una función suave. Definamos tal función como :

$$z_1 = \text{sign}(y_1 - y_{1,critico}) \sqrt{|f(y_1, y_2, \dots, y_n) - f(y_{1,critico}, y_2, \dots, y_n)|}.$$

Las funciones z_1, y_2, \dots, y_n constituyen un sistema de coordenadas suaves de una U_o - vecindad de x_0 a U . Esto termina la prueba dado que se tiene que:

$$f(z_1, y_2, \dots, y_n) - \sigma_1 z_1^2 = f(y_{1,critico}(y_2, \dots, y_n), y_2, \dots, y_n)$$

■

El resultado de este teorema es muy útil en el contexto de clasificar las singularidades en una vecindad de una singularidad no degenerada: existe solamente un solo tipo de singularidad para cada $k = 0, 1, \dots, n$.

Ahora este teorema lo podemos utilizar para establecer el término "cercanía" entre funciones de la siguiente manera. Al igual que se puede definir "cercanía" de puntos en \mathbb{R}^n , se puede definir el mismo concepto para funciones de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Hablando a grandes rasgos dos funciones $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ son "cercanas" si para cierto k entero positivo ($k \leq n$) se tiene que la función f y sus derivadas parciales de orden menor o igual que k están cerca en valor a g y a sus correspondientes derivadas parciales para cada $x \in \mathbb{R}^n$. A partir de esta idea podemos establecer vecindades y por ende una topología en el conjunto $C^\infty(\mathbb{R}^n)$

de todas las funciones $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que son C^∞ . También se puede utilizar localmente para identificar funciones que están cerca unas de otras en alguna vecindad, aunque estén lejos en otros lugares de \mathbb{R}^n . Intuitivamente, g está cerca de f en este contexto si g es una pequeña perturbación de f . Por ejemplo, localmente $g(x) = x^3 + \varepsilon x$ en donde $\varepsilon \neq 0$, está cerca de $f(x) = x^3$, si ε es suficientemente pequeño.

Los dos conceptos antes definidos, equivalencia y cercanía, que miden ambos similitud entre funciones, están relacionados por el concepto de estabilidad.

Definición 2.14 *Sea f una función. Decimos que f es estable si para cualquier función g que está lo suficientemente cerca de f , entonces f y g son equivalentes.*

En otras palabras, f es estable si existe una vecindad U_f de f tal que todas las funciones g en U_f son equivalentes a f .

El ejemplo estándar de una función inestable es el de $f(x) = x^3$, porque para cualquier $\varepsilon \neq 0$, la función $g(x) = x^3 + \varepsilon x$ está cerca de f , mas no es equivalente a f .

Todo lo anterior nos sirve para culminar esta sección. Enunciaremos el resultado principal de la teoría de Morse. Antes necesitamos definir lo siguiente:

Definición 2.15 *Una función f cuyas singularidades son distintas y no degeneradas es una función Morse.*

Teorema 2.16 Teorema de Morse. *Las funciones de Morse son localmente estables [2].*

Esencialmente el Teorema de Morse dice que si f tiene una singularidad no degenerada (de orden k) en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y si g está suficientemente cerca entonces g se ve como f cerca de g en x_0 : esto es, g tiene también una singularidad de orden k en algún punto x'_0 cerca de x_0 .

La importancia de este resultado depende de cuantas funciones de Morse existan. La respuesta es fortuita: "casi toda" función es una función de Morse.

Precisando la última afirmación se tiene que:

La clase M de funciones de Morse es abierta y densa en $C^\infty(\mathbb{R}^N)$

Por lo que, casi toda función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de Morse; toda vecindad U de f contiene alguna función de Morse g y si U es suficientemente pequeña g será equivalente a f , por lo que f también será una función de Morse. Por lo tanto en este caso, funciones estables son genéricas. En general, sin embargo, esto no es cierto. [3]

2.1.3 El Teorema de Mather

En contraste con la teoría de Morse, el objetivo de la teoría de catástrofes está enfocado a las singularidades degeneradas. Por ejemplo, hemos visto que $f(x) = x^3$ tiene una singularidad degenerada en $x_0 = 0$, y que f no es estable. Sin embargo, podemos "incrustar" a f en una familia 1 – parámetro "estable" C^∞ , $F(x, u) = x^3 + ux$. Esta "incrustación" de funciones inestables a familias estables es la esencia de la clasificación de Thom de funciones con singularidades degeneradas.

Definición 2.17 *Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función que tiene una singularidad en x_0 . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x_0 = 0$, puesto que siempre podemos cambiar de coordenadas por traslación. Decimos que el **germen** de f (en 0) es el conjunto de funciones que coinciden con f cerca de 0. Lo denotaremos por \tilde{f} . Al conjunto de todos los germenos de funciones $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de C^∞ en donde $f(0) = 0$ lo denotaremos por G_n .*

Finalmente llegamos a la idea de "desdoblar". Un desdoblamiento de un germen de r - parámetros es un germen $\tilde{F} \in G_{n+r}$ representado por una familia de funciones de r - parámetros $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F(x, 0) = f(x).$$

Para cada (x_0, u_0) cerca de 0, la familia \tilde{F} define un germen \tilde{F}_{u_0} en x_0 cerca de \tilde{f} . Por lo tanto, F desdobla o deforma a f en una familia de germenos. De aquí en adelante por simplicidad, denotaremos al germen de f como f .

Ejemplo 2.18 *Un ejemplo de desdoblamiento sería $F(x, u) = x^3 + ux$, que es un desdoblamiento de 1 - parámetro de $f(x) = x^3$, mientras que $G(x, u) = x^3 + \text{sen}(u_1)x + u_2x^2$ es un desdoblamiento de 2 - parámetros de f . Por lo que dada una singularidad se tienen infinitos desdoblamientos [2].*

Debido al problema expuesto en el ejemplo anterior, de la existencia de una infinidad de desdoblamientos, es importante identificar aquellos que juegan un papel importante. Este problema fue resuelto por Marther, en lo que se llamo el desdoblamiento "universal", que:

- a) tiene el mínimo número de parámetros;
- b) es estable;
- c) es cualitativamente igual a cualquier otro desdoblamiento.

Para dar a conocer el resultado necesitamos establecer la noción de codimensión de un germen. Debido a que el concepto de codimensionalidad se puede asociar con el de dimensionalidad de espacio cociente, daremos a continuación un breve repaso de este concepto. Este repaso nos servirá para aclarar más el ejemplo que se presentará un poco mas adelante, el ejemplo 2.20.

Espacio cociente y su extensión a espacios vectoriales.

La idea que está detrás del espacio cociente es la siguiente:

Dar la manera de construir réplicas isomórficas de todas las imágenes homomórficas de G' de un grupo abstracto G , esto es, sea $x \longrightarrow x'$ cualquier homomorfismo de G en G' y sea N el kernel de tal homomorfismo, si $a, b \in G$ podemos escribir $b = at$ tal que $b' = a't'$, pero $a't' = a'$ pasa sí y solo si $t' = e'$, esto es $t \in N$. En resumen $b' = a'$ sí y solo si $b = at$. A continuación daremos algunas definiciones y resultados simples que nos ayudan a establecer de manera clara y precisa el concepto de espacio cociente [8].

Definición 2.19 *Un isomorfismo entre dos grupos G y G' es una biyección de $a \leftrightarrow a'$ entre los elementos de estos dos grupos que preserva la operación de grupo, i.e.: si $a \leftrightarrow a'$ y $b \leftrightarrow b'$ se tiene que $ab \leftrightarrow a'b'$.*

Definición 2.20 *Un homomorfismo de un grupo G a un grupo G' es una transformación $x \longmapsto x'$ tal que*

$$(xy)' \longmapsto x'y'$$

Lema 2.21 *Dos elementos de G tienen la misma imagen de G' sí y sólo si están en el mismo coset $Nx = xN$ del kernel N [8].*

Definición 2.22 *Un isomorfismo de un grupo G con él mismo, es un automorfismo.*

Definición 2.23 (Galois) *Un subgrupo S de un grupo G es normal (en G) sí y solo si es invariante bajo todos los automorfismos de G .*

Lema 2.24 *Los cosets de cualquier subgrupo normal N de G , forman un subgrupo bajo la operación de grupo [8].*

Definición 2.25 El grupo de cosets es llamado el grupo cociente de G por N y se denota $\frac{G}{N}$.

Hemos visto que para cualquier homomorfismo de G en G' , en donde el kernel es N , la imagen G' es isomorfa con el grupo cociente $\frac{G}{N}$, por lo que se concluye:

Teorema 2.26 Las imágenes homomórficas de un grupo abstracto G son los grupos cocientes por sus diferentes subgrupos normales, en donde la multiplicación de los cosets esta dada por

$$[Nx] \circ [Ny] = N(xy)$$

[8].

Lo anterior se puede extender de manera natural a espacios vectoriales. Sea V un espacio vectorial sobre un campo F y sea S cualquier subespacio de V . Bajo la suma, V es un grupo conmutativo y S es un subgrupo de V entonces se puede formar el grupo cociente $\frac{V}{S}$.

Por ejemplo, en \mathbb{R}^3 sea S el subespacio que consta de los múltiplos $(0, y, 0)$ del vector $(0, 1, 0)$. el coset de cualquier vector $\alpha = (a, b, c)$ será el conjunto de vectores $(a, b + y, c)$. La suma en $\frac{\mathbb{R}^3}{S}$ será $(a, \cdot, c) + (a', \cdot, c') = (a + a', \cdot, c + c')$ [8].

Ahora dado un espacio vectorial V sobre un campo F podemos obtener el espacio cociente $\frac{V}{S} = X$. Esto es, dado un subespacio S de un espacio vectorial V , cada vector $\alpha \in V$ determina un coset de S , definido como el conjunto

$$\alpha + S = \{\alpha + \sigma \mid \sigma \in S\}$$

De aquí que dos cosets $\alpha + S$ y $\beta + S$ son iguales sí y solo si $(\alpha - \beta) \in S$. Geométricamente, los diferentes cosets de un subespacio S son sus subespacios paralelos bajo traslación. La

suma de cosets se define de la siguiente manera

$$(\alpha + S) + (\beta + S) = (\alpha + \beta) + S$$

Es fácil ver que esta suma no depende de los representantes α y β . Ahora el producto escalar de un coset con un escalar c , se define como

$$c(\alpha + S) = c\alpha + S.$$

A partir de estas definiciones de las operaciones no es difícil ver que el conjunto $\frac{V}{S}$ es un espacio vectorial de todos los cosets de S en el espacio vectorial V .

El Teorema de Mather.

Definición 2.27 Sea W una subespacio vectorial de V de dimensión $n - r$, en donde la dimensión de V es n . Se tiene que la **codimensión** de W es $n - (n - r) = r$. De manera alternativa es la dimensión del espacio cociente $\frac{V}{W}$.

La codimensión es importante, especialmente en espacios de dimensión infinita, pues aún cuando V y W tengan dimensión infinita puede suceder que el espacio cociente tenga dimensión finita.

Debido a que todos los germenos en G_n satisfacen $f(0) = 0$, G_n forma un espacio vectorial de dimensión infinita. Ahora consideremos a un germen $f \in G_n$ que tenga una singularidad en el origen. Ahora, denotemos por

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle$$

al subespacio de G_n que consiste de todos aquellos germenos de la forma

$$b(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial f}{\partial x}(x)$$

2.1. TEORÍA ELEMENTAL DE CATÁSTROFES

en donde $a_i(x)$ son germenos en 0. Cada $b(x)$ consiste de una combinación lineal de derivadas parciales de f . Puesto que f tiene una singularidad en el origen ($Df(0) = 0$) se tiene que cada $\frac{\partial f}{\partial x}(0) = 0$; por lo que $b(0) = 0$, por lo que $b(x) \in G_n$. Por lo tanto,

$$\mathbf{codim} \mathbf{f} = \dim \left(\frac{G_n}{\langle \frac{\partial f}{\partial x} \rangle} \right).$$

Se puede mostrar que la $\mathbf{codim} f$ es el número de germenos en 0 equivalentes a f . Una vez definido lo anterior podemos enunciar el teorema de Marther

Teorema 2.28 *Un germen de f tiene un desdoblamiento estable sí y solo si la $\mathbf{codim} f$ es finita [2].*

Lo que el teorema anterior describe es lo siguiente: si la $\mathbf{codim} f = r$ y si $b_1(x), \dots, b_r(x)$ son germenos en 0 representando la base del espacio cociente $\frac{G_n}{\langle \frac{\partial f}{\partial x} \rangle}$, entonces se tiene que

$$F(x, u) = f(x) + \sum_{i=1}^r u_i b_i(x)$$

es el desdoblamiento estable universal de f . [2].

Ejemplo 2.29 *Consideremos el germen $f(x) = x^3$. Primero, por el teorema de Taylor se tiene que cualquier función $g \in C^\infty$ tal que $g(0) = 0$ puede expresarse cerca de 0 por*

$$g(x) = \frac{dg}{dx}(0)x + p(x)x^2$$

en donde $p(x) \in C^\infty$ en 0. Luego, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dx} = 3x^2$, por lo que g representa el elemento $[g] \in \frac{G_1}{\langle \frac{\partial f}{\partial x} \rangle}$ obtenido por ignorar el término que involucra a x^2 : i.e., $[g] = \frac{dg}{dx}(0)x$, es un múltiplo real de x . Por lo que el espacio vectorial $\frac{G_1}{\langle \frac{\partial f}{\partial x} \rangle}$ tiene una base x y por lo tanto dimensión 1. Por lo que por el teorema de Marther se tiene que

$$f(x, u) = x^3 + xu$$

es el desdoblamiento estable universal de $f(x) = x^3$ [8].

2.1.4 El Teorema de Thom

Con esto, podemos presentar el resultado principal del capítulo, la clasificación de las 7 catástrofes elementales.

Teorema 2.30 *Una familia de funciones suaves de r – parámetros de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, para cualquier n y para todo $r \leq 5$, es estructuralmente estable y equivalente (en el sentido antes mencionado) alrededor de cualquier punto, a una de las siguientes formas:*

2.1. TEORÍA ELEMENTAL DE CATÁSTROFES

<i>Nombre</i>	<i>Forma</i>
<i>No crítica</i>	u_1
<i>De Morse</i>	$u_1^2 + \dots + u_i^2 - u_{i+1}^2 - \dots - u_n^2$
<i>Catástrofes "cusp"</i>	
<i>"Fold"</i>	$u_1^3 + t_1 u_1 + M$
<i>"Cusp"</i>	$\pm (u_1^4 - t_2 u_2^2 + t_1 u_1) + M$
<i>"Swallowtail"</i>	$u_1^5 + t_3 u_1^3 + t_2 u_2^2 + t_1 u_1 + M$
<i>"Butterfly"</i>	$\pm (u_1^6 + t_4 u_1^4 + t_3 u_1^3 + t_2 u_1^2 + t_1 u_1) + M$
<i>"Wigwam"</i>	$u_1^7 + t_5 u_1^5 + t_4 u_1^4 + t_3 u_1^3 + t_2 u_1^2 + t_1 u_1 + M$
<i>Catástrofes umbílicas</i>	
<i>"Elliptic"</i>	$u_1^2 u_2 - u_2^3 + t_3 u_1^2 + t_2 u_2 + t_1 u_1 + N$
<i>"Hyperbolic"</i>	$u_1^2 u_2 + u_2^3 + t_3 u_1^2 + t_2 u_2 + t_1 u_1 + N$
<i>"Parabolic"</i>	$\pm (u_1^2 u_2 + u_2^4 + t_4 u_2^2 + t_3 u_1^2 + t_2 u_2 + t_1 u_1) + N$
<i>"Second Elliptic"</i>	$u_1^2 u_2 - u_2^5 + t_5 u_2^3 + t_4 u_2^2 + t_3 u_1^2 + t_2 u_2 + t_1 u_1 + N$
<i>"Second Hyperbolic"</i>	$u_1^2 u_2 + u_2^5 + t_5 u_2^3 + t_4 u_2^2 + t_3 u_1^2 + t_2 u_2 + t_1 u_1 + N$
<i>"Symbolic Umbilic"</i>	$\pm (u_1^3 + u_2^4 + t_5 u_1 u_2^2 + t_4 u_2^2 + t_3 u_1 u_2 + t_2 u_2 + t_1 u_1) + N$

en donde M indica que le debe añadir una función de Morse

$$u_2^2 + \dots + u_i^2 - u_{i+1}^2 - \dots - u_n^2, 1 \leq i \leq n$$

y N indica que una función similar deberá ser añadida

$$u_3^2 + \dots + u_i^2 - u_{i+1}^2 - \dots - u_n^2, 2 \leq i \leq n$$

[10].

En el lenguaje definido arriba, tenemos que, en este resultado se clasifican germen de codimensionalidad de a lo más 4 con singularidades degeneradas. Por el Teorema de Marther, tales germen tienen desdoblamiento estables de a lo más 4 parámetros.

germen de f	Codim f	Desdoblamiento universal $F(x, u)$	Nombre
x^3	1	$x^3 + u_1x$	"Fold"
x^4	2	$x^4 - u_1x^2 + u_2x$	"Cusp"
x^5	3	$x^5 + u_1x^3 + u_2x^2 + u_3x$	"Swallowtail"
$x^3 + y^3$	3	$x^3 + y^3 + u_1xy - u_2x - u_3y$	"Hyperbolic Umbilic"
$x^3 - xy^2$	3	$x^3 - xy^2 + u_1(x^2 + y^2) - u_2x - u_3y$	"Elliptic Umbilic"
x^6	4	$x^6 + u_1x^4 + u_2x^3 + u_3x^2 + u_4x$	"Butterfly"
$x^2y + y^4$	4	$x^2y + y^4 + u_1x^2 + u_2y^2 - u_3x - u_4y$	"Parabolic Umbilic"

El teorema de Thom dice específicamente que cualquier germen de codimensión 4 es cualitativamente el mismo que los enlistados (junto con su desdoblamiento). El teorema de Thom es una lista exhaustiva de desdoblamiento estables con 4 o menos parámetros: cualquier otro desdoblamiento deberá ser equivalente a uno de la lista, en el sentido de equivalencia que se ha descrito arriba.

Finalmente, se puede probar que el conjunto de familias $F \in C^\infty$ de r - parámetros que producen un desdoblamiento estable F_u , $u \in \mathbb{R}^r$ es abierto y denso en el conjunto de todas las familias de r - parámetros, en donde $r \leq 5$. Esta es una de las consecuencias más importantes del teorema, y permite cierta certeza para la estimación de parámetros, dado que si bien no es factible encontrar el modelo verdadero podemos tener la confianza de que siempre existe un modelo catástrofe cerca al verdadero. Notemos que si $r \geq 6$ el resultado del teorema de Thom, deja de ser válido. [2]

Capítulo 3

Modelando estocásticamente una catástrofe

En el capítulo pasado se describió de forma general, toda la maquinaria detrás de la clasificación de las 7 catástrofes elementales. Es claro que esta fundamentada en una sólida estructura matemática. Sin embargo, uno se pregunta si tales fenómenos se presentan en la naturaleza como tal, si ¿la teoría de modelación existente no puede manipular tales fenómenos?, ¿Cómo modelar un fenómeno que bajo ciertas condiciones tiene una sola respuesta y para otras múltiples?, ¿Cuáles son las dificultades y los inconvenientes al tratar de modelar dichos fenómenos de catástrofes?. En síntesis, queremos un marco teórico estocástico que nos permita modelar fenómenos que se rigen bajo el contexto de modelos no lineales y establecer ecuaciones de predicción multivaluadas.

Los modelos catástrofe son atractivos para investigadores de diversas ramas, porque ofrecen la posibilidad de describir superficies respuesta con múltiples estados de equilibrio.

3.1 Teoría de catástrofes: Un marco para modelos dinámicos no lineales

El nombre tan provocativo de "Teoría de Catástrofes" tiene su razón de ser. Fue seleccionado para enfatizar uno de los aspectos no triviales del comportamiento de los sistemas dinámicos no lineales. Para ilustrar esto, veamos el siguiente ejemplo

Ejemplo 3.1 *Consideremos el sistema dinámico representado por la siguiente ecuación diferencial*

$$\dot{y} = x + 3y - y^3.$$

Tal sistema tiene uno o tres puntos de equilibrio para cada valor de x , esto es, la ecuación

$$\dot{y} = 0$$

tiene una o tres posibles soluciones dependiendo del valor de x . Los puntos catástrofe son aquellos valores de x para los cuales se presenta la repentina transición de uno a tres puntos de equilibrio y análogamente de tres a un punto de equilibrio. Para clarificar la definición de un punto catástrofe se puede observar a la figura (3.1)[6].

Un sistema dinámico en general con una variable respuesta y y un vector control x puede ser escrito de la siguiente manera

$$\dot{y} = g(x, y), \tag{3.1}$$

con puntos de equilibrio en los puntos que son solución de la ecuación

$$g(x, y) = 0.$$

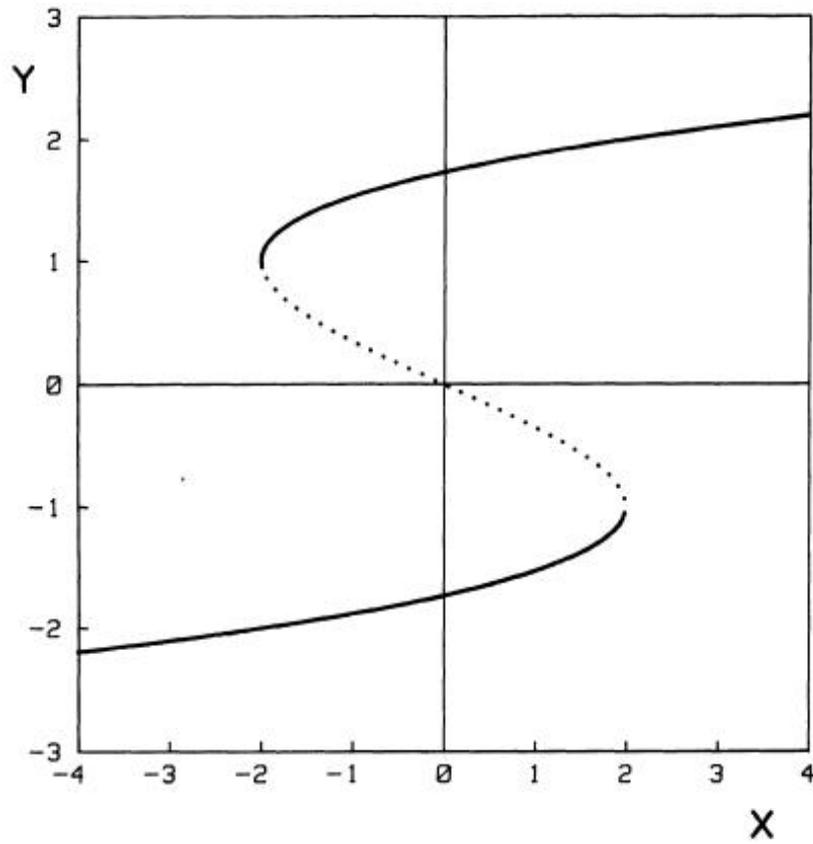


Figura 3.1: Gráfica que ejemplifica los puntos catástrofe de la ecuación diferencial $\dot{y} = x + 3y - y^3$. En este caso los puntos catástrofe son $(2, -1)$ y $(2, 1)$.

3.1. TEORÍA DE CATÁSTROFES: UN MARCO PARA MODELOS DINÁMICOS NO LINEALES

Ahora, supongamos que $c = (x_0, y_0)$ es un punto de equilibrio tal que $\frac{\partial^k g(c)}{\partial y^k} = 0$, $k = 0, 1, \dots, d-1$, y $\frac{\partial^d g(c)}{\partial y^d} < 0$. Si se desarrolla la serie de Taylor de g alrededor del punto c en términos de y (pues x es el vector control) se tiene que

$$\dot{y} = \xi_0 + \xi_d \frac{(y - y_0)^d}{d!}, \quad (3.2)$$

en donde $\xi_k = \frac{\partial^k g(c)}{\partial y^k}$, $k = 0$ y d . No tenemos que perder de vista que se deja establecido implícitamente que el vector control x , está fijo al valor x_0 , no dándonos libertad de poder observar el comportamiento de los puntos de equilibrio a través de la evolución del comportamiento del vector control x . En contraste, la teoría de catástrofes nos proporciona el uso de un desdoblamiento de la ecuación (3.2), que es de la forma

$$\dot{y} = \rho_0(x) + \rho_1(x)y + \dots + \rho_d(x)y^d. \quad (3.3)$$

Esta aproximación permite tanto a x como a y , que se muevan libremente en una vecindad alrededor de c . En la vecindad en donde esta aproximación es válida, existen a lo mas d soluciones equilibrio, que son las soluciones a la ecuación

$$0 = \rho_0(x) + \rho_1(x)y + \dots + \rho_d(x)y^d \quad (3.4)$$

[6].

Claramente estas soluciones son función del vector control x . Aquí lo fundamental es que topológicamente las ecuaciones (3.1) y (3.3) son equivalentes en una vecindad del punto crítico c . Esto es importante hacerlo notar, por lo siguiente: nuestro objetivo es estudiar la relación entre el número máximo de puntos de equilibrio cerca de puntos catástrofe y la forma funcional de la superficie de respuesta en esa vecindad, por lo tanto debemos de tener la certeza de que topológicamente el comportamiento de las raíces de la ecuación (3.1) y

(3.3) sean equivalentes alrededor de un vecindad de c , puesto que nos enfocaremos al análisis estocástico de la ecuación (3.4).

3.2 Un vía para la conceptualización estocástica de los modelos catástrofe

Existe un punto que hay que resaltar de los modelos catástrofe: estos modelos no son estocásticos; no conciben el fenómeno de interés que se quiere estudiar, como un proceso que tiene una parte determinista y otra aleatoria; no conciben el concepto de error como un proceso aleatorio. Los modelos catástrofe fueron diseñados para describir matemáticamente fenómenos físicos que fueran de interés, dándoles un sentido determinístico. Es por esta razón que no podemos conceptualizar a estos modelos como estocásticos en primera instancia.

Esta manera de conceptualizar a los modelos catástrofe es muy conveniente para nuestros intereses, debido a que éstos representan de manera funcional un comportamiento dinámico determinista de un fenómeno de interés. Antes de exponer esta conceptualización veamos a manera de ejemplo el lugar a donde queremos llegar.

La forma dinámica del modelo catástrofe canónico *Cusp* expresa la relación funcional entre la variable estado, y , y el vector control x de la siguiente manera

$$\dot{y} = \alpha(x) + \beta(x)(y - \lambda) - \gamma(y - \lambda)^3 \quad (3.5)$$

en donde las funciones α y β son funciones realvaluadas. Ahora, supongamos que la variable control, x , esta fija. Por lo que podemos considerar a α y β como parámetros. Por lo que ahora tenemos un modelo de 4 parámetros $(\alpha, \beta, \lambda, \gamma)$. El objetivo de la siguiente subsección

es mostrar como se puede obtener una familia de densidades de 4 parámetros para y en el modelo determinístico. Vemos que esta familia de densidades está muy relacionada con el sistema Pearson (Ord, 1972) [6].

Una versión general de (3.5) puede escribirse como:

$$dY_t = h(Y_t) dt + s(Y_t) dW_t \quad (3.6)$$

en donde $h(y) = \alpha + \beta(y - \lambda) - \gamma(y - \lambda)^3$ y la función s^2 como varianza de y . Como antes, $dW_t \sim N(0, dt)$ y son incrementos independientes del proceso de Wiener. Si se interpreta a la ecuación (3.6) en el sentido de $It\hat{o}$, con las condiciones de regularidad necesarias, puede demostrarse que la función de densidad de Y_t se desenvuelve en el tiempo hasta una densidad estacionaria definida en (a, b) (posiblemente infinito). (Soong 1973), [4]. La densidad estacionaria es

$$f(y) = \eta_c \exp \left\{ 2 \int_c^y \frac{g(u)}{s^2(u)} du \right\} \quad (3.7)$$

donde $g(u) = h(u) - s'(u)s(u)$. Los puntos a y b están determinados por s y la constante $c \in (a, b)$. Los puntos mas importantes de la conceptualización se exponen en las siguientes dos subsecciones.

3.2.1 Una catástrofe estocástica

Proporcionamos aquí una descripción general sobre el análisis de modelos de teoría de catástrofe bajo el contexto de ecuaciones diferenciales estocásticas.

En muchas aplicaciones, si denotamos a la variable cuantitativa a través del tiempo por $x(t)$, quisiéramos estudiar los cambios de esta variable a través del tiempo. En el corazón de la definición de $It\hat{o}$ de una ecuación diferencial estocástica de una variable $x(t)$ se encuentran

dos funciones. Intuitivamente descritas, la primera $\mu(x)$ especifica la razón de cambio de la variable $x(t)$, y la segunda $\sigma^2(x)$ especifica la "varianza" de esta razón. En este sentido, la palabra "varianza" muy vagamente describe su significado. La parte aleatoria w_t , se asume (en la formulación de $It\hat{o}$) que es lo que técnicamente se conoce como un proceso de Wiener, una idealización matemática de un proceso Browniano. Esta suposición es razonable para modelos simples de una gran clase de fenómenos estocásticos, en las ciencias biológicas, sociales y exactas. Las funciones $\mu(x)$ y $\sigma^2(x)$ se definen de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\mu(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E[X(t+h) - X(t) | X(t) = x]}{h}, \\ \sigma^2(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E\left\{\frac{1}{2}[X(t+h) - X(t)]^2 | X(t) = x\right\}}{h}.\end{aligned}$$

En el contexto de genética poblacional, la función $\mu(x)$ se conoce como cambio o "drift" y la función $\sigma^2(x)$ como difusión. En esta descripción adoptaremos tal terminología. Habiendo descrito todos los integrantes que entran en juego en la ecuación diferencial estocástica que estudiaremos, es tiempo de presentar a tal ecuación:

$$dx_t = \mu(x_t) dt + \sigma(x_t) dw_t \tag{3.8}$$

La aproximación discreta a la anterior ecuación diferencial estocástica estará dada por:

$$\Delta x_t = \mu(x_t) \Delta t + \sigma(x_t) u_t$$

en donde u_t es una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución $N(0, \Delta t)$ y además independientes de x_t .

Antes de seguir con nuestro análisis, tenemos que cambiar nuestra manera de concebir la solución a la ecuación diferencial anterior. Para poder extraer el máximo beneficio del paradigma de $It\hat{o}$ en la solución de ecuaciones diferenciales estocásticas hay que convencerse

3.2. UN VÍA PARA LA CONCEPTUALIZACIÓN ESTOCÁSTICA DE LOS MODELOS CATÁSTROFE

de que es de mayor utilidad enfocarse en el marco estadístico en que podamos incrustar una solución a dicha ecuación. Nos referimos a que es más informativo estudiar la función de densidad de la variable estocástica que surja como solución, que el estudio de las trayectorias de dicha variable.

El comportamiento a través del tiempo o la evolución de una función de densidad de una variable, en donde el comportamiento de esta regido por una ecuación diferencial estocástica, es descrito necesariamente por una ecuación diferencial parcial. Esto es porque la función de densidad $f(x, t)$ en este caso es una función tanto de x como de t (tiempo). De manera muy interesante, esta evolución esta completamente determinada por las funciones $\mu(x)$ y $\sigma^2(x)$ a través de la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial (\mu(x) f(x, t))}{\partial x} + \frac{\partial^2 (\sigma^2(x) f(x, t))}{\partial x^2}.$$

A esta ecuación se le conoce como la ecuación "forward" de Kolmogorov. Sin embargo, generalmente la solución no se puede dar explícitamente. Sin embargo es muy fácil obtener la solución cuando se ha llegado a un estado de equilibrio, esto es, cuando se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Esta solución esta dada por la fórmula de Wright (1938):

$$f(x) = \frac{\psi}{\sigma^2} \exp \left[\int_{-\infty}^x \frac{\mu(s)}{\sigma^2(s)} ds \right] \quad (3.9)$$

en donde ψ es una constante de tal manera que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

La fórmula de Wright nos provee de una **densidad estacionaria** para cualquier proceso cuya dinámica puede ser descrita por una ecuación diferencial estocástica de $It\hat{o}$, (3.8). El valor

$f(x) dx$ es la probabilidad de que las trayectorias individuales pasen a través del intervalo $[x, x + dx]$, una vez que la población haya alcanzado el equilibrio.

Las dinámicas de un modelo de catástrofe usualmente son descritas en términos del potencial: el sistema se mueve hacia el punto de menor potencial. Si denotamos por $V(x)$ al potencial, la dinámica es

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial x}. \quad (3.10)$$

Las singularidades de $V(x)$ son los puntos x tales que $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$, que son exactamente los puntos para los cuales se alcanza el equilibrio. Estos puntos serán estables o inestables de acuerdo al signo de $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ y los puntos catástrofe estarán dados por $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$. La manera mas simple de convertir a (3.10) en una ecuación estocástica es mediante la adición de un término estocástico

$$dx_t = -\frac{\partial V}{\partial x} dt + \sqrt{\varepsilon} dw_t. \quad (3.11)$$

Ahora, si aplicamos la ecuación de Wright a la ecuación (3.11) obtenemos una densidad estacionaria que es

$$\begin{aligned} f(x) &= \psi \exp \left[-\frac{1}{\varepsilon} \int \frac{\partial V}{\partial x} dx \right] \\ &= \psi \exp \left[-\frac{V(x)}{\varepsilon} \right]. \end{aligned}$$

Si aplicamos logaritmo a ambos lados obtenemos

$$\log f = \log \psi - \frac{V(x)}{\varepsilon}.$$

A partir de esta ecuación es inmediato que las singularidades de $\log f$ corresponden a las singularidades de V . Por lo que toda la maquinaria topológica descrita en el capítulo 2 que caracteriza a las singularidades de V se aplica directamente a $\log f$.

3.2. UN VÍA PARA LA CONCEPTUALIZACIÓN ESTOCÁSTICA DE LOS MODELOS CATÁSTROFE

Ejemplo 3.2 *Analícemos qué pasa en el caso de que nuestro potencial describa el comportamiento de un modelo de catástrofe "Cusp".*

La dinámica de este modelo esta dado por

$$\frac{dx}{dt} = - (a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3).$$

Mediante una reparametrización podemos reescribir la ecuación anterior y obtener

$$\frac{dx}{dt} = r (\alpha + \beta (x - \lambda) - (x - \lambda)^3),$$

los valores de equilibrio de x son los valores para los cuales se tiene $\frac{dx}{dt} = 0$, i.e. las soluciones

a

$$0 = \alpha + \beta (x - \lambda) - (x - \lambda)^3.$$

En este caso, la densidad estacionaria que se obtiene es

$$f(x) = \psi \exp \left[\frac{\alpha (x - \lambda) + \frac{1}{2}\beta (x - \lambda)^2 - \frac{1}{4}(x - \lambda)^4}{\delta} \right]$$

en donde $\delta = \frac{\varepsilon}{r}$. [5]

A pesar de lo anterior, al momento de aplicar los modelos catástrofe a un fenómeno físico que resulta importante describir, surge una pregunta de manera natural, ¿cómo estimo estos modelos?, ¿de qué manera puedo incorporar la información que recopiló de mi fenómeno de interés y plasmarlo en un modelo catástrofe?. Pueden existir algunas respuestas a esta última pregunta, fundamentalmente en Cobb (1980), quién logra establecer, de una manera metódica y bien justificada una respuesta a estas preguntas; su propuesta establece cómo concebir la incertidumbre como aleatoria para dar una vía estadística al proceso de estimación de los modelos catástrofe. Cobb proporciona una liga entre los modelos de catástrofe y la

modelación estocástica que permite la estimación estadística de los parámetros involucrados en la descripción del modelo de catástrofe.

3.2.2 La liga de Cobb

La familia multimodal de la distribución exponencial comprende cuatro distribuciones importantes, que se desprenden como un caso especial de ella. Estas clases de distribuciones pueden ser expresadas en su forma general por

$$f(x) = \xi(\boldsymbol{\beta}) \exp \left[- \int^x \frac{g(s)}{v(s)} ds \right], \quad (3.12)$$

en donde $g(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \dots + \beta_k x^k$, $k > 0$ y $v(x)$ tiene una de las siguientes formas principales:

Tipo **N (Familia Normal)**: $v(x) = 1$, $-\infty < x < \infty$

Tipo **G (Familia Gamma)**: $v(x) = x$, $0 < x < \infty$

Tipo **I (Familia Inversa gamma)**: $v(x) = x^2$, $0 < x < \infty$

Tipo **B (Familia Beta)**: $v(x) = x(1-x)$, $0 < x < 1$.

La integral en (3.12) será entendida como una integral indefinida y el dominio de $f_k(x)$ será el dominio en donde $v(x)$ es positiva. En (3.12), la función $\xi : \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ es la constante de normalización que hace que $f_k(x)$ integre a 1. Al polinomio g se le llamará el polinomio de forma de la densidad f . Nos referiremos como moda y antimoda a los máximos y mínimos de la densidad.

Analicemos (3.12). Derivando el logaritmo a ambos lados de (3.12) da como resultado

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = - \frac{g(x)}{v(x)} \quad (3.13)$$

Observamos que como estamos únicamente concentrados en el dominio de f , que es en donde v es estrictamente positiva (al igual que f es estrictamente positiva en su dominio, eso es fácil de ver a partir de la expresión (3.12), fijarnos en los puntos críticos de la densidad f es fijarse en las raíces del polinomio g . Que ese punto crítico sea una moda o una antimoda dependerá del signo de $g''(x)$. En las raíces de $v(x)$ la densidad presenta ceros ($f(x) \rightarrow 0$) o un polo ($f(x) \rightarrow \infty$) dependiendo en los coeficientes de $g(x)$. Las únicas excepciones a esto ocurren cuando $g(x)$ y $v(x)$ comparten raíces, estos puntos son puntos degenerados frontera para la densidad.

La liga que hemos estado anunciando, entre los modelos catástrofe y la modelación estocástica es el polinomio g . Es en esta función en donde recae la forma de la densidad multimodal exponencial y la forma de la superficie catástrofe, estableciendo el puente entre los modelos catástrofe y estocásticos.

Estadísticamente nos basaremos en la familia multimodal de la distribución exponencial para estimar los parámetros del polinomio de forma, de nuestro modelo catástrofe. Al hacer esto, estaremos estimando los parámetros de la superficie catástrofe. Los máximos y mínimos de la densidad multimodal estimada, $f'(x) = 0$, serán los puntos que conformarán la superficie catástrofe $g(x) = 0$.

3.2.3 Los principales grupos de densidades de la familia multimodal exponencial.

La función en la que recae la diferenciación de los tipos de densidades estacionarias consideradas es $v(x)$. Para simplificar la notación, nos referiremos como $N_k(x)$ a la densidad

que pertenece a la familia de densidades del tipo \mathbf{N} de grado k , y análogamente para $G_k(x)$, $I_k(x)$ y $B_k(x)$.

El grupo \mathbf{N}_k

El grupo \mathbf{N}_k tiene como principal miembro a la densidad normal, \mathbf{N}_1 . El grupo expuesto en la figura 1, \mathbf{N}_3 , fue primero analizada por Fisher (1922), pero ha recibido atención ocasional. La relevancia que tienen \mathbf{N}_3 , \mathbf{G}_3 y \mathbf{I}_3 al análisis estadístico del modelo de catástrofe "Cusp" ha sido reciente. [6]. La forma general de la densidad \mathbf{N}_k es

$$N_k(x) = \xi \exp [\theta_1 x + \theta_2 x^2 + \dots + \theta_{k+1} x^{k+1}]$$

en donde $\theta_j = -\frac{\beta_{j-1}}{j}$. \mathbf{N}_k tiene momentos finitos de todos los ordenes si k es impar y $\theta_{k+1} < 0$.

El grupo \mathbf{G}_k

El grupo de densidades \mathbf{G}_k tiene como miembro principal a la densidad gamma, \mathbf{G}_1 , e incluye a las densidades exponencial y Rayleigh. La forma general de esta familia de densidades es

$$G_k(x) = \xi x^{\alpha-1} \exp [\theta_1 x + \theta_2 x^2 + \dots + \theta_k x^k]$$

en donde $\alpha = 1 - \beta_0$ y $\theta_j = -\frac{\beta_j}{j}$. \mathbf{G}_k tiene momentos finitos de todos los ordenes si $\alpha > 0$ y $\theta_k < 0$.

El grupo \mathbf{I}_k

El grupo de densidades \mathbf{I}_k tiene como miembro principal a la densidad gamma inversa, \mathbf{I}_1 . La densidad \mathbf{I}_2 es una generalización de la densidad gaussiana inversa. La forma general

de esta familia de densidades es

$$I_k(x) = \xi x^\alpha \exp [\gamma x^{-1} + \theta_1 x + \theta_2 x^2 + \cdots + \theta_{k-1} x^{k-1}]$$

donde $\alpha = -\beta_1$, $\gamma = \beta_0$ y $\theta_j = -\frac{\beta_{j+1}}{j}$. \mathbf{I}_k tiene momentos finitos de todos los ordenes si $\gamma < 0$ y $\theta_{k-1} < 0$.

El grupo \mathbf{B}_k

Por último, el grupo de densidades \mathbf{B}_k tiene como miembro principal a la densidad beta, \mathbf{B}_1 . La densidad \mathbf{B}_3 ha sido usada en genética poblacional para describir la frecuencia de los heterocigotos con ventaja. Esta densidad es de particular interés, pues como se muestra en la figura 3.2 presenta un comportamiento de W , esto es, una moda central entre dos polos ($f(x) \rightarrow \infty$). La forma general de esta familia de densidades es

$$B_k(x) = \xi x^{\alpha-1} (1-x)^{\gamma-1} \exp [\theta_1 x + \theta_2 x^2 + \cdots + \theta_{k-1} x^{k-1}]$$

en donde $\alpha = 1 - \beta_0$, $\gamma = 1 + \sum_{i=0}^k \beta_i$ y $\theta_j = \frac{\beta_{j+1}}{j}$. \mathbf{B}_k tiene momentos finitos de todos los ordenes si $\alpha > 0$ y $\gamma > 0$.

Existen otros grupos de densidades que se desprenden de la familia de densidades multimodal, como la *t-student*; sin embargo, las más conocidas son las descritas anteriormente.

Una vez presentadas las densidades con las que trabajaremos, estableceremos algunas técnicas de estimación de sus parámetros.

3.3 Estimación de las densidades liga

Presentaremos en esta sección presentamos dos maneras posibles de contrarrestar la dificultad inicialmente descrita. La primera de ellas está basada en un método de estimación por momentos. La segunda manera está basada en un método de máxima verosimilitud, el cual permite el establecimiento y planteamiento de hipótesis.

3.3.1 Estimación mediante momentos

Este método de estimación de superficie de catástrofe se puede concebir, de manera general, como la solución de un sistema lineal de ecuaciones. Una manera directa en que se puede pensar, es estableciendo el método de estimación de parámetros de Pearson, que relaciona los $k + 1$ parámetros del polinomio $g(x)$ de (3.12) con los primeros $k + 1$ momentos de la densidad. El problema aquí radica en lo siguiente: en el caso de la familia multimodal de la distribución exponencial no existe una fórmula general que relaciona los $k + 1$ momentos con los parámetros de la densidad. Sin embargo, existe una manera alternativa de proceder que relaciona $2k$ primeros momentos con los parámetros. Esta manera de proceder esta basada en el siguiente resultado:

Teorema 3.3 *Sea X una variable aleatoria con densidad $f(x)$ del tipo \mathbf{N}_k , \mathbf{G}_k , \mathbf{I}_k y \mathbf{B}_k con $k > 0$. Para cualquier $j \geq 0$ se tiene que*

$$E [X^j g(X)] = E \left[\{X^j v(X)\}' \right].$$

Demostración:

3.3. ESTIMACIÓN DE LAS DENSIDADES LIGA

Usemos (3.13) e integremos por partes. Sea (a, b) el dominio de f . Entonces

$$E [X^j g(X)] = \int_a^b x^j g(x) f(x) dx = \int_a^b x^j \left\{ \frac{-v(x) f'(x)}{f(x)} \right\} f(x) dx = - \int_a^b x^j v(x) f'(x) dx$$

Ahora, integrando por partes

$$- \int_a^b x^j v(x) f'(x) dx = -x^j v(x) f(x) \Big|_a^b + \int_a^b x^j v(x) f(x) dx$$

Notando que $x^j v(x) f(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow a$ y $x \rightarrow b$ para el caso de las densidades que estamos considerando, se tiene el resultado. ■

De este resultado se desprende directamente las relaciones entre los parámetros y los momentos que estamos buscando.

Corolario 3.4 *Para cada una de las cuatro densidades principales de la familia multimodal exponencial existe una fórmula recursiva para los momentos no centrales μ_i :*

$$\text{Tipo N: } \sum_{i=0}^k \beta_i \mu_{i+m} = m \mu_{m-1}$$

$$\text{Tipo G: } \sum_{i=0}^k \beta_i \mu_{i+m} = (m+1) \mu_m$$

$$\text{Tipo I: } \sum_{i=0}^k \beta_i \mu_{i+m} = (m+2) \mu_{m+1}$$

$$\text{Tipo B: } \sum_{i=0}^k \beta_i \mu_{i+m} = (m+1) \mu_m - (m+2) \mu_{m+1}.$$

Para el caso en el que $k = 1$ estas fórmulas ya han sido trabajadas. El procedimiento para la estimación puede ser generalizado con el siguiente resultado

Corolario 3.5 *Sea $M_{k+1 \times k+1}$ la matriz de momentos para la variable aleatoria $X : [M]_{ij} = \mu_{i+j-2}$. Entonces*

$$M\beta = \alpha$$

en donde $\alpha_j = E [\{X^{j-1}v(X)\}']$.

Este corolario nos provee de una relación entre los parámetros y los momentos que es muy útil para efectos de estimación. Simplemente usando el hecho de que,

$$\widehat{\beta} = \widehat{M}^{-1}\widehat{\alpha}$$

en donde las entradas de \widehat{M}^{-1} y de $\widehat{\alpha}$ son los momentos muestrales. Las entradas de $\widehat{\alpha}$ dependerán del tipo de densidad con la que se esté trabajando. Del resultado anterior existe un detalle que debe tomarse en cuenta. ¿Existe siempre \widehat{M}^{-1} ?, o si no ¿para qué casos tiene sentido este cómputo?. La respuesta es que no se tiene que siempre la existencia de \widehat{M}^{-1} . Sin embargo, existe un resultado que nos garantiza que M es invertible con probabilidad 1. Veamos el siguiente lema:

Lema 3.6 Sean X_1, X_2, \dots, X_n v.a.i.i.d. Sea $[\widehat{M}]_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{X_k^{i+j-2}}{n}$. Entonces \widehat{M} es una matriz positiva definida con probabilidad 1.

Demostración:

Sea $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_k)$ un vector arbitrario distinto del vector cero. Notemos que $n\gamma'\widehat{M}\gamma = \sum_{i=0}^n (\gamma_0 + \gamma_1 X_i + \dots + \gamma_k X_i^k)^2$. Mas como X tiene una densidad continua se tiene que

$$P(\gamma_0 + \gamma_1 X_i + \dots + \gamma_k X_i^k = 0) = 0$$

para $i = 1, \dots, n$. De lo anterior se tiene que el resultado se cumple. ■

Se tienen dos resultados que pueden dar cierta fortaleza estadística a nuestro estimador por el método de momentos. Las propiedades a las que nos referimos son: consistencia y normalidad asintótica.

Teorema 3.7 *El estimador $\widehat{\beta} = \widehat{M}^{-1}\widehat{\alpha}$ es consistente y $\sqrt{n}(\widehat{\beta} - \beta)$ es asintóticamente normal multivariado con matriz de covarianzas V , tal que*

$$[MVM]_{ij} = E \left\{ \left(\widehat{\alpha}_i - [\widehat{M}\beta]_i \right) \left(\widehat{\alpha}_j - [\widehat{M}\beta]_j \right) \right\}.$$

Demostración:

Consistencia:

Por el lema demostrado, se tiene que \widehat{M} es invertible (c.p.1). La función que lleva una matriz a su inversa es diferenciable respecto a cada una de sus entradas, por la Ley Débil de Grandes Números se tiene que $\widehat{M} \xrightarrow{P} M$ y que $\widehat{M}^{-1} \xrightarrow{P} M^{-1}$. Además, $\widehat{\alpha} \xrightarrow{P} \alpha$, por lo tanto

$$\widehat{\beta} \xrightarrow{P} \beta$$

Normalidad asintótica:

Tenemos que $\sqrt{n}(\widehat{M} - M) = \mathbf{O}_p(1)$ y $\widehat{\beta} - \beta = \mathbf{o}_p(1)$. Consideremos la siguiente identidad

$$\sqrt{n}M(\widehat{\beta} - \beta) = \sqrt{n}(\widehat{\alpha} - \widehat{M}\beta) - \sqrt{n}(\widehat{M} - M)(\widehat{\beta} - \beta)$$

Cada entrada del segundo término del lado derecho es $\mathbf{O}'_p(1)\mathbf{o}_p(1) = o_p(1)$. Por lo que

$$\sqrt{n} \left[(\widehat{\beta} - \beta) - M^{-1}(\widehat{\alpha} - \widehat{M}\beta) \right] \xrightarrow{P} 0$$

Ahora, $\sqrt{n}M^{-1}(\widehat{\alpha} - \widehat{M}\beta)$ puede ser escrito como $\sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{h}(X_i)}{\sqrt{n}}$, donde $\mathbf{h}(x)$ es un vector de polinomios de x . Es fácil ver que $E[\mathbf{h}(X)] = \mathbf{0}$. Sea $[V]_{ij} = E[h_i(X)h_j(X)]$. Entonces se tiene que $\sqrt{n}(\widehat{\beta} - \beta)$ es asintóticamente normal $N(\mathbf{0}, V)$ por el Teorema Multivariado del Límite Central. ■

Hasta el momento hemos descrito una técnica de estimación que nos ha dado una herramienta para la manipulación de la variable dependiente de nuestro modelo de catástrofe. Sin embargo, ¿cómo introducimos en este procedimiento de estimación la información que nos proporcionan las variables que conforman el vector control?

La manera de incorporar la información del vector control la expondremos mediante un ejemplo de estimación de la superficie catástrofe "cusp". Para las demás catástrofes se puede generalizar este procedimiento.

El modelo canónico cusp esta definido mediante

$$0 = \alpha + \beta \left(\frac{y - \lambda}{\sigma} \right) - \left(\frac{y - \lambda}{\sigma} \right)^3, \quad (3.14)$$

en donde λ puede ser pensado como un parámetro de localización y σ un parámetro de escala. A los parámetros α y β se les denomina como parámetros control. Se presenta una gráfica de esta superficie en la figura 3.4.

Este vector control bi-dimensional (α, β) , que surge en el caso de la catástrofe "cusp", puede depender de las variables independientes X_1, X_2, \dots, X_n , en donde n puede ser mayor que 2. Para relacionar estas n variables con el vector control se propone establecer la siguiente dependencia:

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_n X_n$$

$$\beta = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_n X_n$$

Para poder utilizar los resultados de estimación mediante la técnica de momentos enunciaremos una versión modificada del teorema 3.3, que nos ayudará a estimar la superficie "cusp" incorporando la información de las variables que intervienen en el comportamiento del vector control

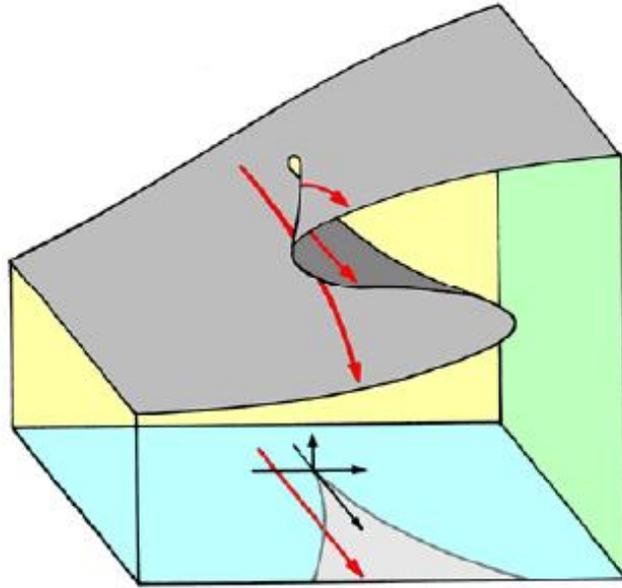


Figura 3.2: Superficie de catástrofe "cusp", que en su forma canónica es: $0 = \alpha + \beta z - z^3$.

Teorema 3.8 Sea $g(x, y)$ una función polinomial de x y y tal que

$$0 < \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[- \int g(x, y) dy \right] < \infty.$$

Sea ξ el recíproco de tal cantidad. Definamos a la densidad condicional de la $Y|X$ por

$$f(y|x) = \xi \exp \left[- \int g(x, y) dy \right].$$

Supongamos que la densidad conjunta tiene momentos de todos los órdenes y sea $h(x)$ la densidad de X . Entonces para cualesquiera enteros no negativos j y k se tiene que

$$E [X^j Y^k g(X, Y)] = k E [X^j Y^{k-1}]$$

Demostración:

Notemos que primero lo siguiente: $f(y|x)$ es asintóticamente cero cuando y tiende a ∞ o a $-\infty$. Como $g(x, y)$ es un polinomio, tenemos que igual se tiene que y tiende a ∞ o a

$-\infty$. A partir de la definición de $f(y|x)$ podemos escribir a $g(x, y)$ de la siguiente manera:

$$g(x, y) = -\frac{\left[\frac{\partial f(y|x)}{\partial y}\right]}{f(y|x)}.$$

De aquí que

$$\begin{aligned} E[X^j Y^k g(X, Y)] &= \int \int x^j y^k g(x, y) f(y|x) h(x) dy dx \\ &= \int \int x^j y^k (-\partial f(y|x)) h(x) dx dy \\ &= \int x^j h(x) \left\{ \int y^k (-\partial f(y|x)) dy \right\} dx \end{aligned}$$

Ahora, integrando por partes se tiene que

$$\begin{aligned} -\int y^k \partial f(y|x) dy &= -y^k f(y|x) \Big|_{-\infty}^{\infty} + k \int y^{k-1} f(y|x) dy \\ &= k \int y^{k-1} f(y|x) dy. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} E[X^j Y^k g(X, Y)] &= \int x^j h(x) \left\{ \int y^k (-\partial f(y|x)) dy \right\} dx = \int x^j h(x) \left\{ k \int y^{k-1} f(y|x) dy \right\} dx \\ &= k E[X^j Y^{k-1}] \end{aligned}$$

■

El ejemplo para el cual estimaremos la superficie de catástrofe "cusp" fue tomado de [3]. Los datos fueron tomados de un estudio de rendimiento de manejo para analizar el desempeño de los choferes antes y después de haber ingerido alcohol. Para este ejemplo se considera un modelo con una variable explicativa para el vector control, lo que da como resultado

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 \tag{3.15}$$

$$\beta = \beta_0 + \beta_1 X_1$$

3.3. ESTIMACIÓN DE LAS DENSIDADES LIGA

en donde X_1 es introversión la cual se midió bajo la escala Bernreuter. A partir de (3.15) se tiene que la función polinomial $g(x, y)$ que está asociada a este fenómeno de interés es:

$$g(x, y) = b_1 + b_2x + b_3y + b_4xy + b_5y^2 + b_6y^3$$

de donde mediante una serie de operaciones se tiene que:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{-b_5}{3b_6}, \sigma = b_6^{-\frac{1}{4}} \\ \alpha_0 &= -\sigma (b_1 + b_3\lambda + b_5\lambda^2 + b_6\lambda^3) \\ \alpha_1 &= -\sigma (b_2 + b_4\lambda) \\ \beta_0 &= -\sigma^2 (b_3 + b_5\lambda) \\ \beta_1 &= -\sigma^2 b_4\end{aligned}$$

Para este ejemplo se aplicó el teorema anterior con $j = 0$ y $k = 0, 1, 2, 3$ y $j = 1$ y $k = 0, 1$.

Estos casos dieron el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}E[g(X, Y)] &= 0 \\ E[Yg(X, Y)] &= 1 \\ E[Y^2g(X, Y)] &= 2E[Y] \\ E[Y^3g(X, Y)] &= 3E[Y^2] \\ E[Xg(X, Y)] &= 0 \\ E[XYg(X, Y)] &= E[X]\end{aligned}$$

que es equivalente a

$$\begin{aligned}
 b_1 + b_2 E(X) + b_3 E(Y) + b_4 E(XY) + b_5 E(Y^2) + b_6 E(Y^3) &= 0 \\
 b_1 E(Y) + b_2 E(YX) + b_3 E(Y^2) + b_4 E(XY^2) + b_5 E(Y^3) + b_6 E(Y^4) &= 1 \\
 b_1 E(Y^2) + b_2 E(Y^2X) + b_3 E(Y^3) + b_4 E(XY^3) + b_5 E(Y^4) + b_6 E(Y^5) &= 2E(Y) \\
 b_1 E(Y^3) + b_2 E(Y^3X) + b_3 E(Y^4) + b_4 E(XY^4) + b_5 E(Y^5) + b_6 E(Y^6) &= 3E[Y^2] \\
 b_1 E(X) + b_2 E(X^2) + b_3 E(XY) + b_4 E(X^2Y) + b_5 E(XY^2) + b_6 E(XY^3) &= 0 \\
 b_1 E(XY) + b_2 E(X^2Y) + b_3 E(XY^2) + b_4 E(X^2Y^2) + b_5 E(XY^3) + b_6 E(XY^4) &= E(X).
 \end{aligned}$$

La superficie ajustada se presenta en las figura 3.5 y los datos son presentados en la figura 3.6.

3.3.2 Estimación mediante máxima verosimilitud

Este paradigma de estimación no nos resultará nada extraño, aunque estemos estimando los parámetros de una superficie de catástrofe. Esto es debido a que la familia de densidades con las que estamos trabajando pertenecen a una generalización de la familia exponencial. Debido a esto, en esta parte no nos detendremos demasiado en la teoría y nos enfocaremos de una manera importante en la descripción de la implementación del método mediante un ejemplo de estimación para la superficie de catástrofe "cusp".

Debido que las densidades \mathbf{N}_k , \mathbf{G}_k , \mathbf{I}_k y \mathbf{B}_k pertenecen a la bien conocida familia exponencial, no nos será difícil demostrar que si contamos con una muestra de variables aleatorias independientes X_1, X_2, \dots, X_n de una de las anteriores densidades los siguientes vectores son los estadísticos mínimos suficientes:

Tipo **N (Familia Normal)**: $(\sum X, \sum X^2, \dots, \sum X^{k+1})$.

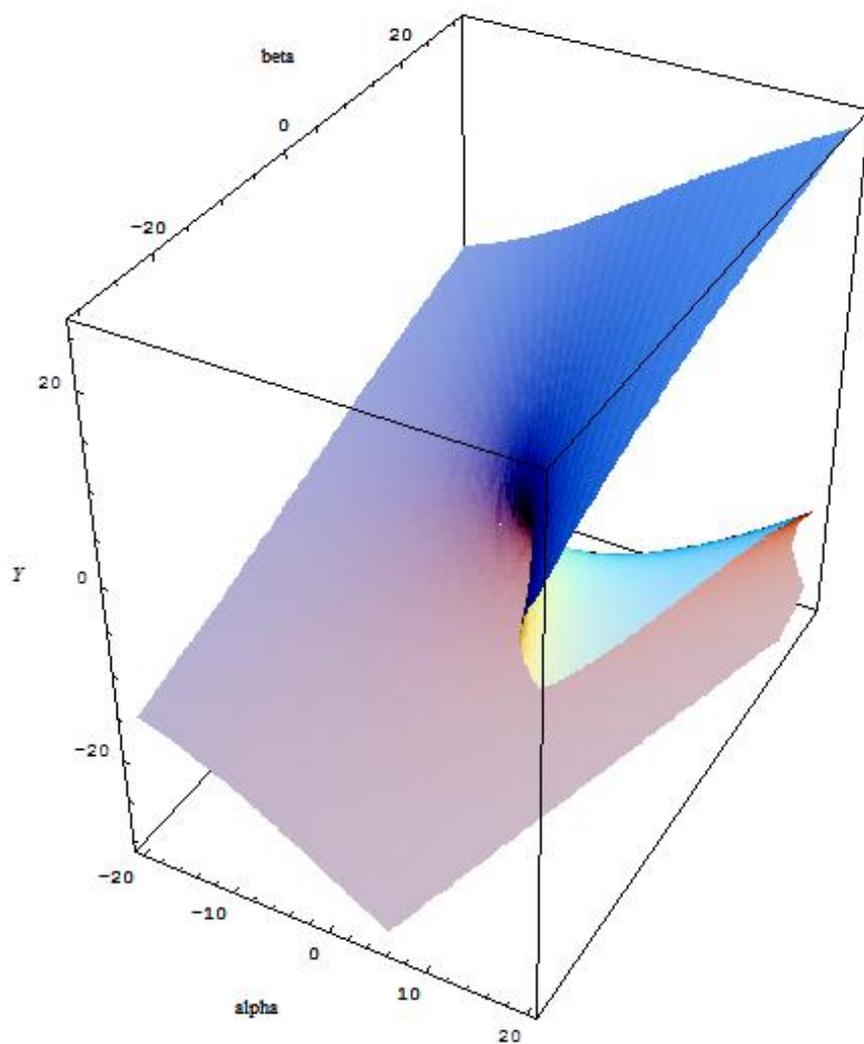


Figura 3.3: Superficie de catástrofe estimada mediante el método de momentos.

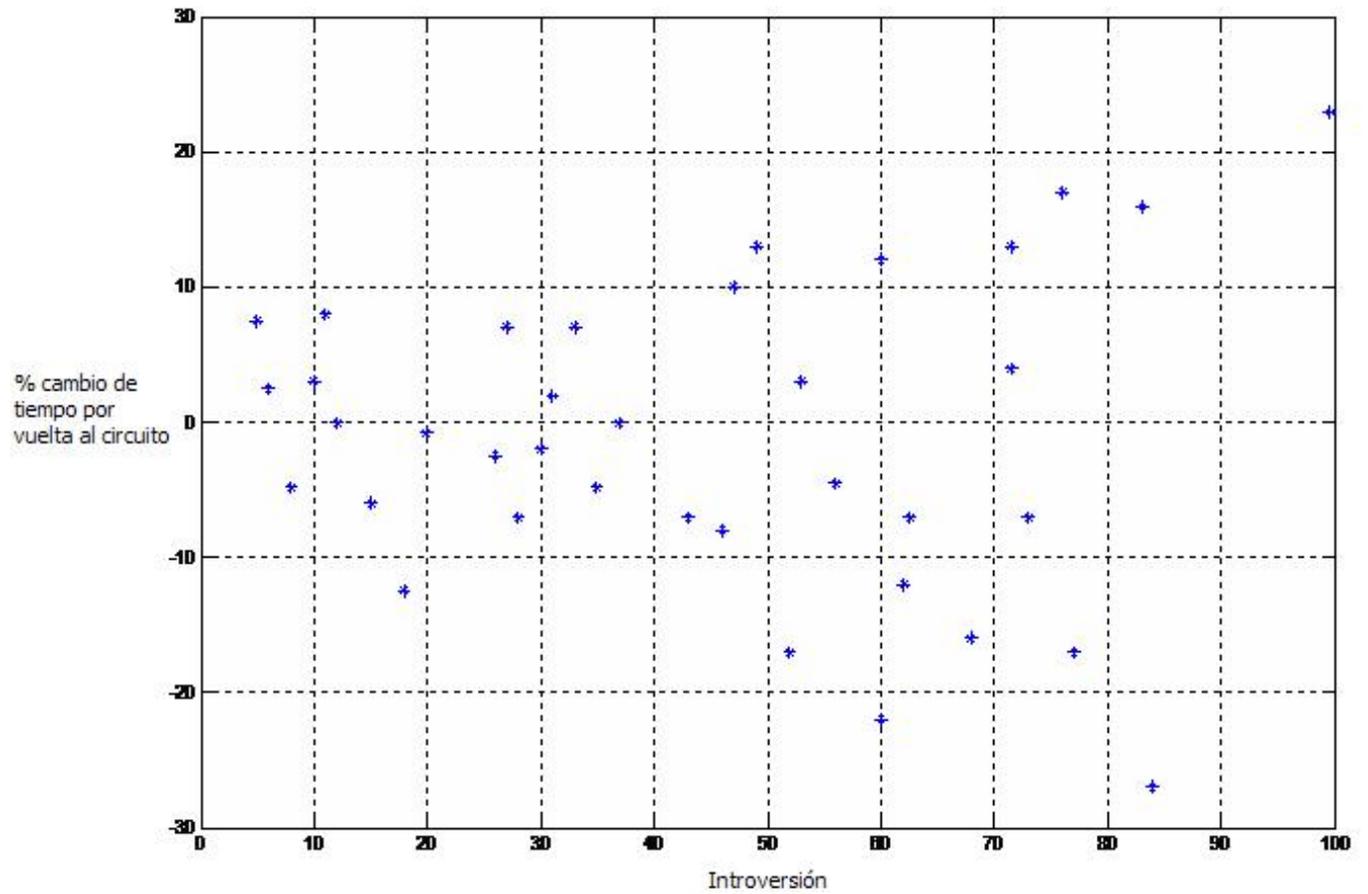


Figura 3.4: Datos del experimento realizado al cual se le ajusto una superficie de catástrofe. Estos datos fueron presentados en Cobb (1980).

Tipo **G (Familia Gamma)**: $(\sum \ln(X), \sum X, \dots, \sum X^k)$.

Tipo **I (Familia Inversa gamma)**: $(\sum X^{-1}, \sum \ln(X), \dots, \sum X^{k-1})$.

Tipo **B (Familia Beta)**: $(\sum \ln(X), \sum \ln(1 - X), \dots, \sum X^{k-1})$.

No es difícil mostrar que el Hessiano de la log-verosimilitud negativa, para el caso de estas cuatro familias de densidades, es una matriz definida positiva. De aquí que los estimadores de máxima verosimilitud son únicos, por lo que en principio pueden ser calculados. Veamos el caso particular para estimar la superficie de catástrofe "cusp".

La función de densidad estándar de la superficie de catástrofe "cusp" es:

$$f(y) = \xi \exp \left(\alpha \left(\frac{y - \lambda}{\sigma} \right) + \frac{\beta}{2} \left(\frac{y - \lambda}{\sigma} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{y - \lambda}{\sigma} \right)^4 \right)$$

Supondremos que el vector control bi-dimensional depende de las variables independientes X_1, X_2, \dots, X_n por lo que supondremos que las variables control tienen la siguiente estructura:

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_n X_n,$$

$$\beta = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_n X_n.$$

A partir de la anterior suposición se tiene que densidad estándar de la superficie de catástrofe "cusp" es:

$$f(y|x) = \xi \exp \left[(\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \left(\frac{y - \lambda}{\sigma} \right) + \frac{1}{2} (\beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n) \left(\frac{y - \lambda}{\sigma} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{y - \lambda}{\sigma} \right)^4 \right].$$

La anterior densidad puede llevarse a la forma canónica exponencial cuando se establece un cambio de variable biyectivo entre los parámetros de éstas densidades. De aquí que, la

densidad canónica toma la forma:

$$f(y|x) = \xi \exp [\tau_1 x_1 y + \tau_2 x_2 y + \dots + \tau_n x_n y + \eta_1 x_1 y^2 + \eta_2 x_2 y^2 + \dots + \eta_n x_n y^2 + \mu_1 y + \mu_2 y^2 + \mu_3 y^3 + \mu_4 y^4].$$

El objetivo es estimar el siguiente vector de parámetros

$$\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4).$$

Sea S el vector de medias muestrales definido por

$$\begin{aligned} S_Y &= \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y_i, \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y_i^2, \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y_i^3, \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y_i^4 \right), \\ S_{XY} &= \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_{1i} Y_i, \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_{2i} Y_i, \dots, \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_{ni} Y_i \right), \\ S_{XY^2} &= \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_{1i} Y_i^2, \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_{2i} Y_i^2, \dots, \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_{ni} Y_i^2 \right), \end{aligned}$$

en donde $S = (S_Y, S_{XY}, S_{XY^2})^T$. Definamos por $M(\tau)$ el vector de esperanzas de $f(y|x)$ definido por

$$\begin{aligned} M_Y(\tau) &= (E[Y], E[Y^2], E[Y^3], E[Y^4]), \\ M_{XY}(\tau) &= (E[X_1 Y], E[X_2 Y], \dots, E[X_n Y]), \\ M_{XY^2}(\tau) &= (E[X_1 Y^2], E[X_2 Y^2], \dots, E[X_n Y^2]), \end{aligned}$$

en donde $M(\tau) = (M_Y(\tau), M_{XY}(\tau), M_{XY^2}(\tau))^T$. Sea $H_{2n+4 \times 2n+4}(\tau)$ la matriz de covarianzas de las variables aleatorias en cuestión.

El método de estimación vía máxima verosimilitud es una búsqueda utilizando el algoritmo de Newton-Raphson. Empieza con un valor inicial para τ , que puede ser por ejemplo

t_0 el vector de estadísticas suficientes minimales. Con cada iteración, la aproximación se va mejorando sumando la cantidad $[S - M(t)] [H(t)]^{-1}$, esto es,

$$t + [S - M(t)] [H(t)]^{-1}.$$

Este ciclo de iteraciones se realiza hasta que

$$S = M(t),$$

dentro de un margen numérico adecuado. Debemos notar que para cada iteración se tiene que actualizar el vector $M(t)$ y la matriz $H(t)$. Los momentos que el método requiere se pueden obtener mediante integración numérica, puesto que las expresiones cerradas para los momentos de una densidad "cusp" no son conocidas. [4],[6].

3.4 Selección de variables

Hemos descrito en la sección anterior algunas de las técnicas de estimación de superficies de catástrofe reportadas en la literatura. Mas surge una pregunta muy natural: ¿qué tan bueno es el modelo que estamos ajustando a los datos?, ¿los datos nos dan indicio a pensar que es un modelo de catástrofe el que los describe?, si no los describe un modelo catástrofe ¿qué otros modelos pueden capturar un camino rígido y rápido de aceleración de los datos en vez de un cambio discontinuo?, ¿cuál es la herramienta estadística de que podemos disponer para realizar esta bondad de ajuste?. De igual manera, para algunos experimentos u observación de fenómenos naturales existen ciertas variables a las que se les denomina "variables control", debido a que son variables a ser manejadas por el experimentador. Siendo el objetivo saber si existe relación o impacto alguno de las variables control en la variable que

es considerada como la respuesta, surgen también preguntas como ¿cuáles son las variables que tienen un impacto significativo en la variable respuesta?, ¿qué metodología estadística podemos aplicar en el contexto de modelos catástrofes para saber esto?.

A continuación describiremos la metodología estadística de la que nos serviremos para tratar de establecer la significancia de las variables control en el modelo catástrofe. Mas debemos de tener en consideración lo siguiente: debido a que el modelo de catástrofe no es lineal en sus parámetros y que existe más de un punto para ciertas configuraciones del vector control, es difícil definir una predicción del error y por ende las pruebas de bondad de ajuste son casi inútiles puesto que estas pruebas se basan fuertemente en el concepto de predicción del error [7]. Debido a esta complejidad no existe una prueba estadística definitiva para una prueba de hipótesis de un modelo de catástrofe, sin embargo podemos hacer uso de la técnica que a continuación presentaremos y también considerar el contexto del fenómeno al que pertenecen los datos.

3.4.1 Selección de las variables significativas en el modelo catástrofe

"cusp"

Debido a que los modelos catástrofe no son lineales en sus parámetros y que existe más de un punto para ciertas configuraciones del vector control, es difícil definir una predicción del error. Teniendo en mente que el modelo catástrofe no es lineal no se puede establecer un análogo al R^2 que se utiliza en modelos lineales.

No existe una manera canónica de establecer una comparación entre modelos no anidados. Sin embargo, alguna versión de una razón de verosimilitudes nos puede dar una idea de que

modelo es más verosímil, como función de los datos.

Describiremos una manera de proceder para el modelo catástrofe "cusp" propuesto por [7].

Recordemos que al inicio de la sección anterior se expuso la densidad estándar de la superficie de catástrofe "cusp" la cuál es:

$$f(y) = \xi \exp \left(\alpha \left(\frac{y - \lambda}{\sigma} \right) + \frac{\beta}{2} \left(\frac{y - \lambda}{\sigma} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{y - \lambda}{\sigma} \right)^4 \right).$$

Recordemos también que supondremos que el vector control bi-dimensional depende de las variables independientes X_1, X_2, \dots, X_n por lo que las variables control tienen la siguiente estructura:

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_n X_n, \quad (3.16)$$

$$\beta = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_n X_n.$$

Ahora, a partir del planteamiento (3.16), una vez estimados los parámetros $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, λ y σ , ¿cuáles son los parámetros que estadísticamente son distintos de cero? Una manera de resolver esta pregunta es mediante la razón de verosimilitud.

El procedimiento de las variables que son estadísticamente distintas de cero se describe a continuación:

- 1) Estimar el modelo "básico" que solamente tiene como parámetros a α_0 y β_0 .
- 2) Estimar el modelo para cada variable de manera independiente y calcular la función log-verosimilitud para todas las variables.
- 3) Incorporar al modelo la variable con el valor de la función log-verosimilitud mas pequeño del paso 2).

Para esto realizamos lo siguiente, determinamos la diferencia entre $-2 \log(-\text{verosimilitud})$ del modelo básico y el modelo con la variable incorporada y se comparan mediante la razón de verosimilitud. Esto prueba la hipótesis nula, de que el coeficiente incluido en el modelo, excluyendo las constantes (α_0, β_0) , es cero. Esta prueba nos dice si el coeficiente añadido es estadísticamente distinto de cero o no.

4) Realizar el paso 3) para todas las variables. Si el cambio es significativo, la variable permanecerá en el modelo, sino será desechada.

5) Los pasos 3) y 4) continúan hasta que el modelo previo es encontrado de nuevo o hasta que no haya variables que agregar.[8]

Capítulo 4

Una aplicación de teoría de catástrofes a un problema de salud pública

Como muchos otros países latinoamericanos en vías de desarrollo, México enfrenta el reto de plantear soluciones a necesidades sociales que se están presentando con el desenvolvimiento del sistema económico que se ha adoptado. Uno de estos problemas que se presenta y que requiere un replanteamiento en las formas en las que se puede llegar a establecer una posible solución, son las enfermedades crónicas no transmisibles (ECNT). Este es un problema del área de salud pública.

Desde hace no mucho tiempo se ha registrado un notable incremento de las ECNT asociadas a estilos de vida no saludables. Estas enfermedades y trastornos en conjunto, entre los que se encuentran la hipertensión arterial, la diabetes mellitus, la enfermedad coronaria, los accidentes cerebrovasculares, la obesidad, desnutrición y algunos tipos de cáncer, son las principales causas de muerte, morbilidad, discapacidad y deterioro de la calidad de vida.

Otro aspecto crítico de las epidemias de ECNT es el alto costo que representan para los

servicios de salud el tratamiento y la rehabilitación de pacientes con estas afecciones, factores que acentúan las inequidades existentes.

Entre las ECNT, la obesidad merece especial atención, ya que es en sí misma una enfermedad crónica y a la vez un reconocido factor de riesgo de muchas otras. El estudio y abordaje de la obesidad no pueden desligarse de los de otras ECNT por diversas razones: 1) porque comparten algunos factores causales y subyacentes comunes, como la alimentación inapropiada y el sedentarismo; 2) porque al identificar a los sujetos obesos se está identificando a una alta proporción de los sujetos en riesgo de padecer otras ECNT; 3) porque al prevenir la obesidad (mediante la promoción de estilos de vida saludables) se previenen la mayoría de las ECNT; y, por último, 4) porque al tratar al obeso se disminuye el riesgo de que sufra complicaciones y también se reduce el efecto mediador que tiene la obesidad en relación con otros factores de riesgo.

La desnutrición en sus diversas formas es la más común de las enfermedades. Sus causas se deben en general a deficientes recursos económicos o a enfermedades que comprometen el buen estado nutricional. Según el manual internacional de clasificación de enfermedades es una complicación médica posible pero que puede prevenirse y que tiene impacto muy importante sobre el resultado de los tratamientos.

Hoy en día la desnutrición es aceptada como un factor común en la práctica clínica que tiene como consecuencia un aumento en el tiempo de estancia hospitalaria, morbilidad y mortalidad en los pacientes hospitalizados, debido al alto riesgo de complicaciones como infecciones, flebitis, embolismo pulmonar, falla respiratoria, baja cicatrización de heridas y fístula que éstos sufren. Como consecuencia, la estancia hospitalaria y los costos de la terapia se incrementan significativamente.

El estado nutricional en condiciones normales es la resultante del balance entre lo consumido y lo requerido, lo cual está determinado por la calidad y cantidad de nutrientes de la dieta y por su utilización completa en el organismo.

En los últimos años se le había restado importancia a la valoración nutricional de los pacientes, ya que los parámetros hasta ahora desarrollados no han sido aprobados debido a que en algunos casos se ven afectados por la respuesta a la enfermedad per se, además de representar una relación costo-beneficio importante para el paciente. Pero ahora debido al impacto que tiene la nutrición en la evolución clínica, se ha acrecentado el interés por encontrar un marcador preciso de mal nutrición.

4.1 Un análisis estadístico, dentro del contexto de teoría de catástrofes, de un problema de salud pública del estado de Nuevo León

En base en la situación anteriormente planteada y las consecuencias que presentan las ECNT, es importante y crucial que los sistemas de salud pública cuenten con un método para la predicción de estas. Sin embargo, no podemos dejar de lado el impacto que tienen en la nutrición de la población el establecimiento y la aplicación de políticas laborales y económicas. Un tema de estudio de gran interés es analizar de que manera impacta el salario mínimo en la nutrición de la población en México. Esto debido a que una de las finalidades del salario mínimo es proporcionar lo mínimo necesario para la subsistencia del trabajador. En palabras de Abelardo L. Rodríguez, Presidente de la República Mexicana de septiembre de

4.1. UN ANÁLISIS ESTADÍSTICO, DENTRO DEL CONTEXTO DE TEORÍA DE CATÁSTROFES, DE UN PROBLEMA DE SALUD PÚBLICA DEL ESTADO DE NUEVO LEÓN

1932 a noviembre de 1934 y uno de los principales actores que permitió el establecimiento del salario mínimo en México: el salario mínimo debe de estar diseñado para que el trabajador con el pueda *"satisfacer sus necesidades, tanto las más apremiantes como aquéllas que lo capaciten para acrecentar su cultura y desenvolver su existencia progresivamente"*, para que *"disfrute de una vivienda confortable, de una comida nutritiva y de una indumentaria que lo proteja de las inclemencias del tiempo"*.

Un problema que se presenta en distintas zonas urbanas del estado de Nuevo León es la desnutrición familiar. Debido a esto, el Dr. Esteban Ramos Peña, de la Facultad de Salud Pública y Nutrición de la Universidad Autónoma de Nuevo León, realizó una encuesta a 100 familias en los años 2000 y 2005, con la finalidad de analizar establecer el comportamiento del estado nutricional de las familias en ciertas regiones del estado de Nuevo León y su evolución en el tiempo.

4.1.1 Planteamiento del problema

Se presenta la necesidad de establecer un modelo que pueda describir el comportamiento del estado nutricional, en particular, la ingéstica calórica y su relación con el ingreso mensual de 100 familias encuestadas en los años 2000 y 2005. Se tomó en cuenta el número de integrantes de las familias, la elaboración de productos alimenticios de autoconsumo, el cultivo de hortalizas de traspatio y la crianza de animales para la alimentación; actividades que pueden tener impacto cuando se proveen de alimentos.

4.1.2 Análisis descriptivo de los datos

Establecimiento de las variables con las que se trabajará

La manera en que describiremos el comportamiento del estado nutricional de las 100 familias en el año 2000 y 2005 será a través de una ponderación de la cantidad de Kcal que consume cada familia entre la cantidad de Kcal recomendadas por familia, en síntesis:

$$Y = \frac{\text{Kcal consumidas por familia}}{\text{Kcal recomendadas por familia}}.$$

La manera de obtener la cantidad de Kcal recomendadas por familia, en opinión del especialista, el Dr. Esteban Ramos, es la siguiente: se multiplica el número de miembros de la familia por 2109Kcal, cantidad recomendada para personas mayores a 5 años. A partir de esto se tiene que:

$$Y = \frac{\text{Kcal consumidas por familia}}{\text{Número de integrantes por familia} \times 2109\text{Kcal}}.$$

La forma de obtener la variable ligada al ingreso mensual es la siguiente: se ponderó el ingreso mensual por familia con el ingreso del salario mínimo. Lo anterior es debido que el salario mínimo esta diseñado para poder consumir la cantidad de Kcal recomendadas diariamente para no caer en un estado de desnutrición. De aquí que la variable control queda definida como:

$$X = \frac{\text{Ingreso mensual}}{\text{Salario mínimo mensual} \times \text{Número de integrantes por familia}}.$$

El registro de las actividades familiares como: elaboración de productos alimenticios de autoconsumo, cultivar hortalizas de traspatio y la crianza de animales para la alimentación,

fue registrada como realizada o no. A estas variables las denotaremos de la siguiente manera:

Elaboran alimentos = EA

Crían animales = CA

Cultivan hortalizas = CH

El objetivo es establecer la relación de Y con X , EA , CA y CH , y analizar su variación a medida que cambian los valores de las variables control. En este contexto, es de esperarse que Y pueda manifestar cambios bruscos ante variaciones pequeñas de X . Generalmente, en las ciencias sociales se tiene el inconveniente que los cambios muy pocas veces ocurren de instantánea. En el caso de ingesta calórica, bajo ciertas condiciones de las variables control, puede esperarse una transición a valores aceptables en los estándares internacionales. Esta transición puede darse en forma acelerada aunque no llegue a ser propiamente discontinua. Por ello, pensar en un modelo de catástrofes para describir este comportamiento le resulta natural a los científicos. Esto es, se planteo el paradigma de modelación de catástrofes: existe un rango de valores de las variables control (X , CA , EA y CH) de la población de interés, para las cuales Y tenga un comportamiento abrupto, o visto de otra manera, podemos determinar los niveles de las variables control para las cuales se pueda observar un comportamiento "no continuo" de la ingesta calórica?

Análisis de los datos

Es importante realizar un análisis descriptivo de la información para entender las distribuciones base que sustentan a los modelos de catástrofe, particularmente al modelo "cusp", dado que regularmente se trabaja con el modelo normal. Cabe notar que estos tipos de análi-

CAPÍTULO 4. UNA APLICACIÓN DE TEORÍA DE CATÁSTROFES A UN PROBLEMA DE SALUD PÚBLICA

sis descriptivos tienen sentido sólo cuando consideramos a la variable Y per se.

Presentamos en las siguientes tablas el análisis descriptivo de Y para los años 2000, 2005

y considerando juntos los años 2000 y 2005.

Cuantiles 2000	Y	Cuantiles 2005	Y
100%	0.98538	100%	0.59973
75%	0.26159	75%	0.22168
50%	0.16691	50%	0.15265
25%	0.11354	25%	0.10549
0%	0.01883	0%	0.00005

Momentos 2000	Y	Momentos 2005	Y
Media	0.2057	Media	0.1825
Desviación Estandar	0.1509	Desviación Estandar	0.1123
Cota 95% superior de la media	0.2357	Cota 95% superior de la media	0.2048
Cota 95% inferior de la media	0.1758	Cota 95% inferior de la media	0.1602

Presentamos en las siguientes tablas el análisis descriptivo de X para los años 2000, 2005

y considerando juntos los años 2000 y 2005.

Cuantiles 2000	X	Cuantiles 2005	X	Cuantiles 2000-2005	X
100%	0.75973	100%	0.294	100%	0.75973
75%	0.37986	75%	0.13368	75%	0.28490
50%	0.28490	50%	0.09187	50%	0.14700
25%	0.18993	25%	0.06063	25%	0.08820
0%	0	0%	0	0%	0

4.1. UN ANÁLISIS ESTADÍSTICO, DENTRO DEL CONTEXTO DE TEORÍA DE CATÁSTROFES, DE UN PROBLEMA DE SALUD PÚBLICA DEL ESTADO DE NUEVO LEÓN

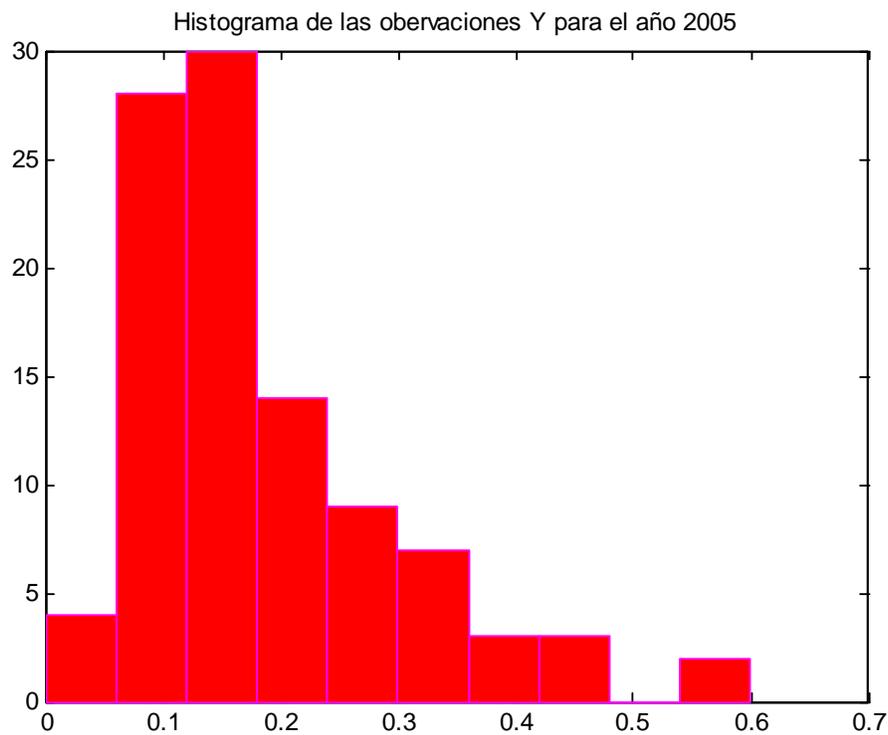


Figura 4.1: Histograma de las observaciones Y para el año 2005. En éste se refleja el comportamiento asimétrico que se había detectado en las tablas de los cuantiles.

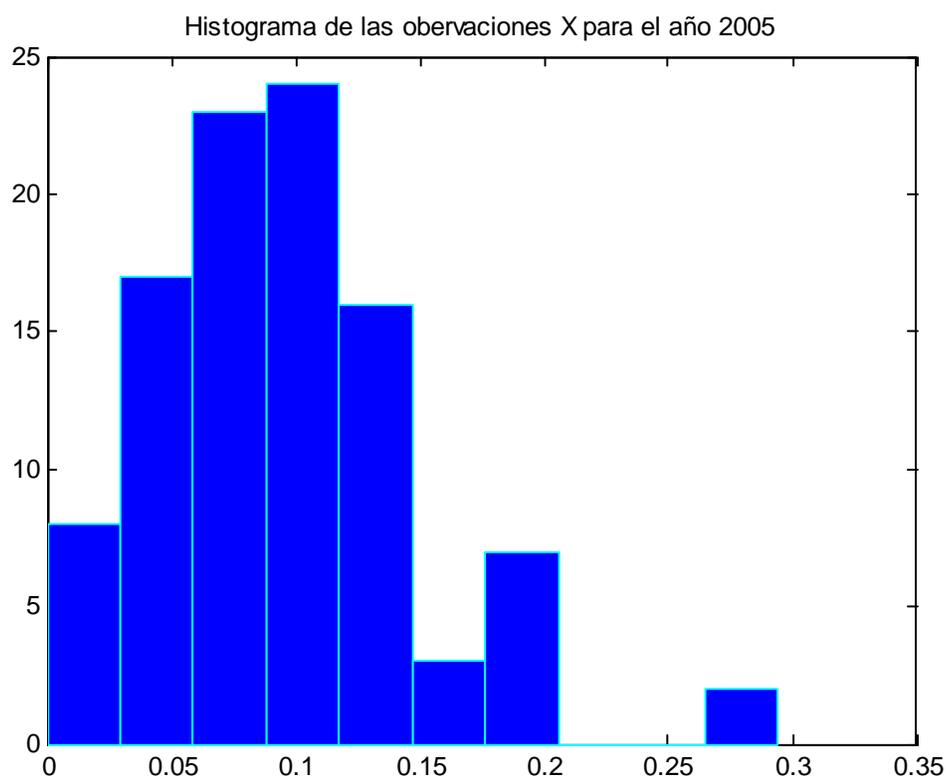


Figura 4.2: Histograma de las observaciones X para el año 2005. En éste se refleja el comportamiento asimétrico que se había detectado en las tablas de los cuantiles.

4.1. UN ANÁLISIS ESTADÍSTICO, DENTRO DEL CONTEXTO DE TEORÍA DE CATÁSTROFES, DE UN PROBLEMA DE SALUD PÚBLICA DEL ESTADO DE NUEVO LEÓN

Momentos 2000	X	Momentos 2005	X
Media	0.28809	Media	0.09737
Desviación Estandar	0.13595	Desviación Estandar	0.05419
Cota 95% superior de la media	0.26112	Cota 95% superior de la media	0.08662
Cota 95% inferior de la media	0.31507	Cota 95% inferior de la media	0.10813

Momentos 2000-2005	X
Media	0.19273
Desviación Estandar	0.14069
Cota 95% superior de la media	0.17311
Cota 95% inferior de la media	0.21235

De lo anterior se puede observar que la distribución de los datos Y presenta una asimetría con una cola derecha pesada. Lo anterior se puede observar en los histogramas que se presentan en las figuras 4.1 y 4.3. Es claro que pensar en una densidad normal, no parece razonable, en conjunto con el hecho de que la variable solo puede tomar valores positivos.

Entonces dado que se tiene un comportamiento asimétrico y datos estrictamente positivos, se puede establecer la hipótesis de que los datos pueden ser descritos mediante una densidad de la familia gama (G_k). Recordemos que la expresión general de la densidad del tipo gama es:

$$G_k(x) = \xi x^{\alpha-1} \exp [\theta_1 x + \theta_2 x^2 + \dots + \theta_k x^k]$$

en donde ξ es función de α y de los θ'_i s. Una manera de corroborar la hipótesis de que alguna de las densidades de la familia G_k es apropiada para la descripción de la superficie de catástrofes, es mediante una prueba de bondad de ajuste; en particular, seleccionamos

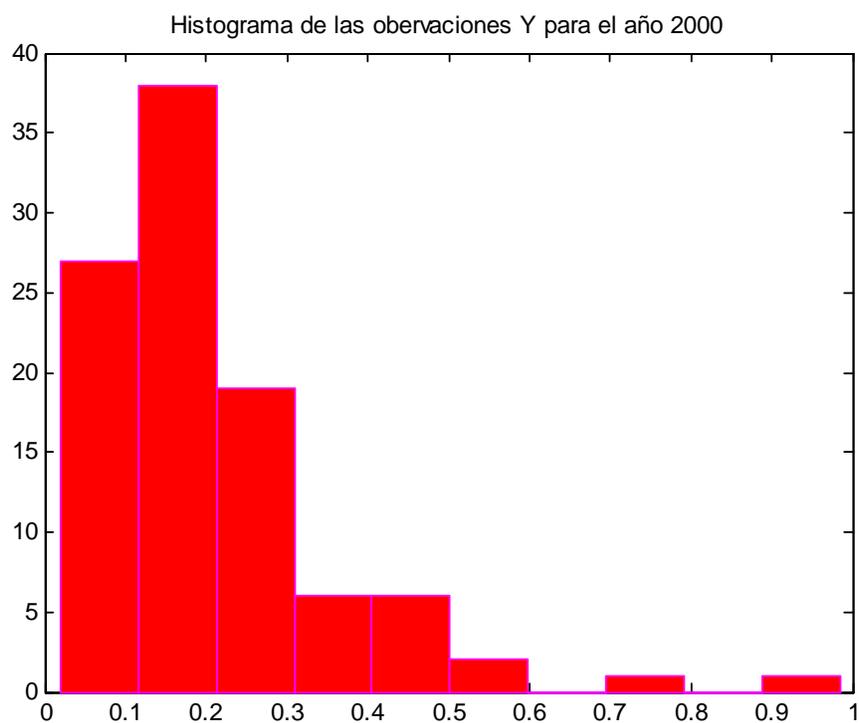


Figura 4.3: Histograma de las observaciones Y para el año 2000. En éste se refleja el comportamiento asimétrico que se había detectado en las tablas de los cuantiles.

4.1. UN ANÁLISIS ESTADÍSTICO, DENTRO DEL CONTEXTO DE TEORÍA DE CATÁSTROFES, DE UN PROBLEMA DE SALUD PÚBLICA DEL ESTADO DE NUEVO LEÓN

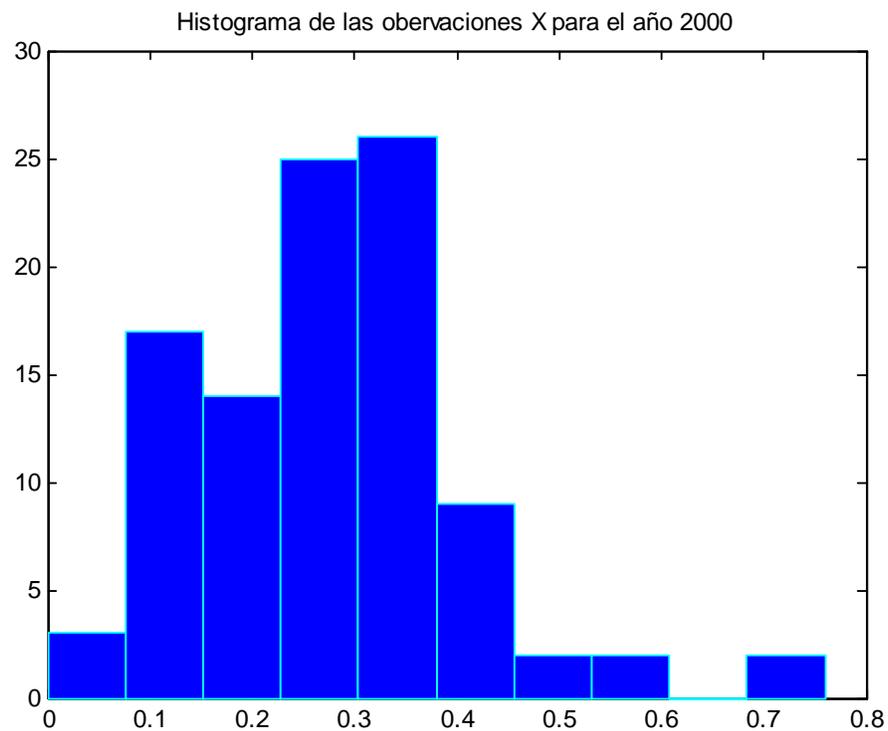


Figura 4.4: Histograma de las observaciones X para el año 2000. En éste se refleja el comportamiento asimétrico que se había detectado en las tablas de los cuantiles.

la prueba de Anderson-Darling, por sus conocidas propiedades estadísticas. Debido a que existen ingresos nulos para algunas de las familias, solo se consideraron las observaciones que tienen registros no nulos para la formación de índice X , esto es 97 observaciones para el año 2000 y 98 observaciones para el año 2005. A continuación se muestra una tabla con los valores del estadísticos de Anderson-Darling:

Estimaciones del estadísticos Anderson-Darling

	2005	2000
G_1	0.861237	0.390477
G_2	0.583033	0.270558
G_3	0.179923	0.277860

A partir de los resultados, vemos que mediante los estadísticos de Anderson-Darling podemos establecer que, para densidad G_3 es el mejor para el 2005 y las densidades G_2 y G_3 para el 2000. En la figura 4.5 presentamos una gráfica $Q - Q$ del ajuste de la densidad G_3 para el año 2005 y en la figura 4.6 presentamos el ajuste de la densidad a los datos.

En la figura 4.7 presentamos una gráfica $Q - Q$ del ajuste de la densidad G_3 para el año 2000 y en la figura 4.8 presentamos el ajuste de la densidad a los datos.

A partir de lo anterior resulta razonable considerar las densidades de la familia G_k en nuestro análisis. A continuación veremos las técnicas usadas para la estimación de los parámetros de estas densidades, lo que nos llevará a conocer los parámetros de las superficies catástrofes. Para ello usaremos los resultados de Cobb (1983) discutidos en el capítulo anterior.

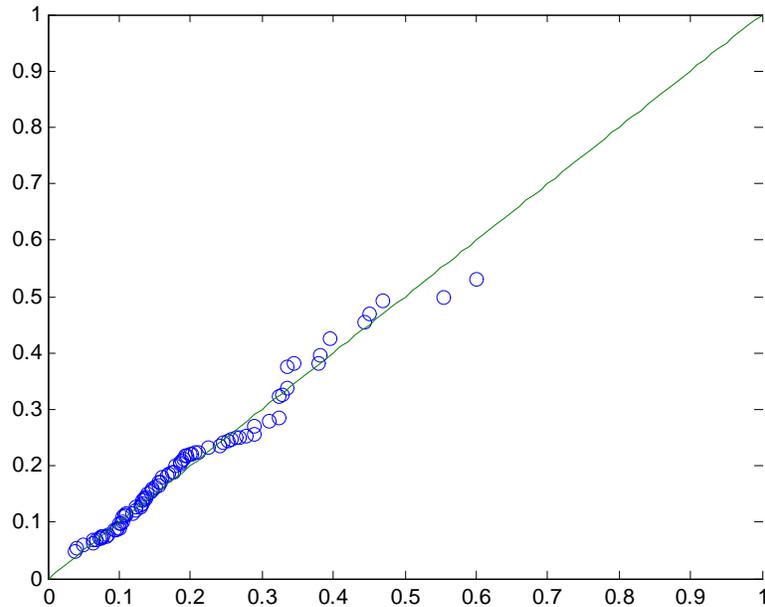


Figura 4.5: Gráfica cuantil-cuantil para los datos del año 2005, del ajuste de la densidad G_3 .

4.1.3 Estimación de una superficie de catástrofe

Recordando lo visto en la sección 3.2, a partir de los trabajos de Cobb, se tiene establecida una liga entre los modelos catástrofe y una familia particular de densidades: familia multimodal exponencial. Para estimar las superficies de catástrofes, se empleará un miembro de la familia multimodal exponencial, la familia gamma G_k , la cuál tiene como caso particular a la distribución gama cuando $k = 1$, basándonos en el análisis descriptivo de los datos y de los resultados que se encontraron a partir de los ajustes, de las gráficas cuantil-cuantil y del estadístico de Anderson-Darling.

La familia de densidades G_k tiene la siguiente forma:

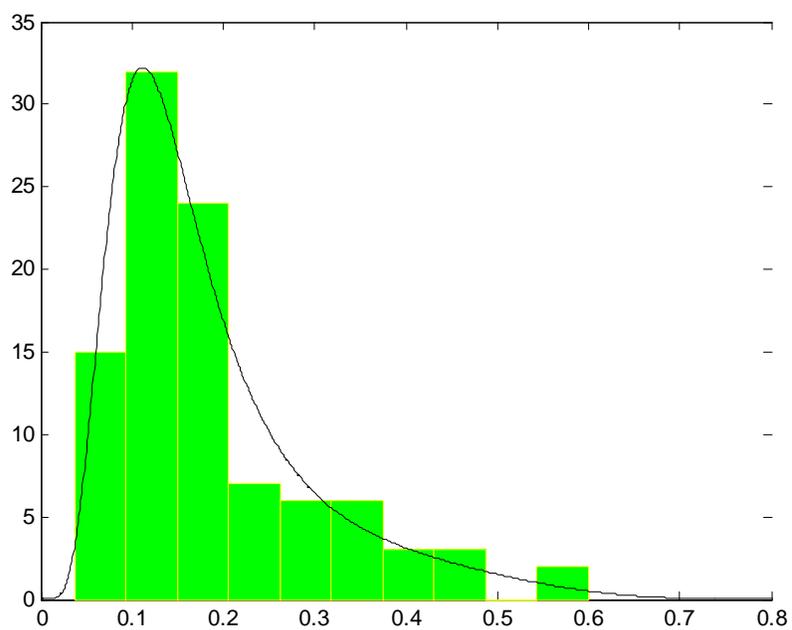


Figura 4.6: Gráfica de la densidad ajustada para los datos del año 2005, del ajuste de la densidad G_3 .

4.1. UN ANÁLISIS ESTADÍSTICO, DENTRO DEL CONTEXTO DE TEORÍA DE CATÁSTROFES, DE UN PROBLEMA DE SALUD PÚBLICA DEL ESTADO DE NUEVO LEÓN

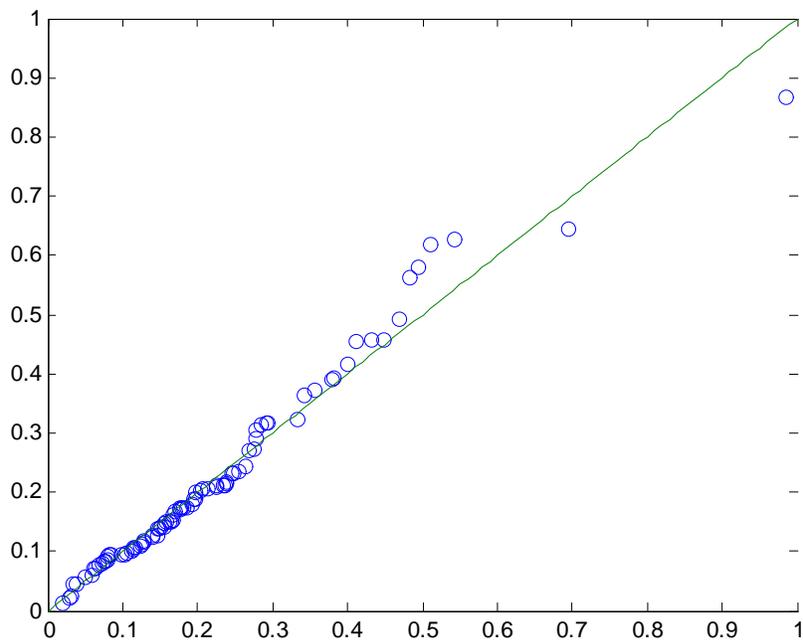


Figura 4.7: Gráfica cuantil-cuantil para los datos del año 2000, del ajuste de la densidad G_3 .

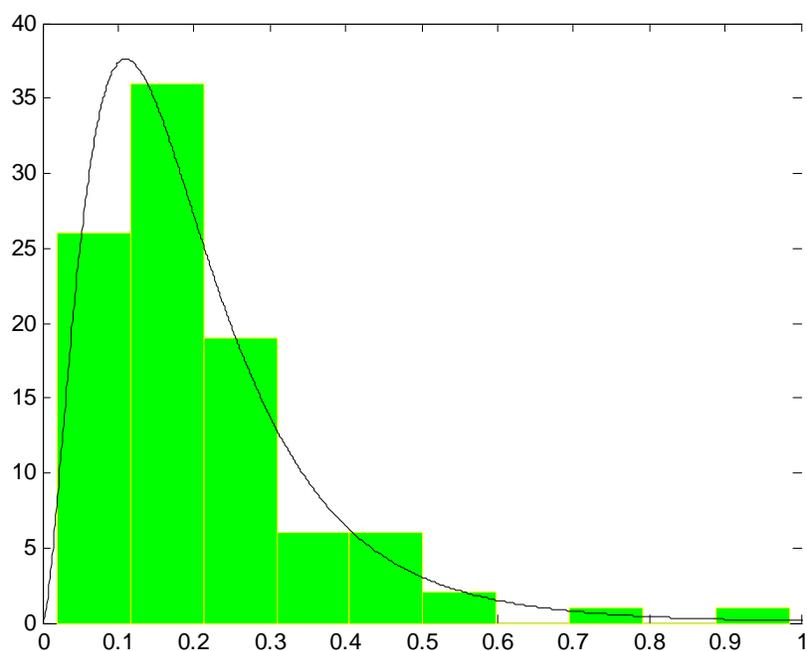


Figura 4.8: Gráfica de la densidad ajustada para los datos del año 2000, del ajuste de la densidad G_3 .

$$G_k(x) = \xi x^{\alpha-1} \exp[\theta_1 x + \theta_2 x^2 + \dots + \theta_k x^k]$$

en donde $\alpha = 1 - \beta_0$, $\theta_j = -\frac{\beta_j}{j}$. y ξ es función de los parámetros α y θ . G_k tiene momentos finitos de todos los ordenes si $\alpha > 0$ y $\theta_k < 0$.

Se estimaron los parámetros de las densidades G_1 , G_2 y G_3 mediante las técnicas de momentos y mediante el método de máxima verosimilitud reportadas por Cobb en (1981) y (1983). Se estimaron los parámetros para el caso en que se considera el modelo sin variables control y para el caso en que se consideran las variables control que se han definido. Cuando no se tienen variables control, la maximización mediante la técnica de máxima verosimilitud reportada en Cobb (1981), resultó ser la óptima para las tres densidades propuestas. Cuando se considera la acción de variables control en el modelo, no se obtienen resultados satisfactorios mediante ninguno de estos dos procedimientos clásicos. Regularmente en estos casos la función de máxima verosimilitud, no converge. Esto es debido a que la verosimilitud presenta algunas singularidades en ciertas vecindades del máximo verosímil. Mediante la técnica heurística del simplejo, se procedió a maximizar la verosimilitud. Se utiliza la función *fminsearch* de MATLAB[©], alcanzándose el máximo verosímil para todos los casos.

4.1.4 Resultados

Presentamos a continuación los resultados que se obtuvieron al ajustar los modelos catástrofe en los dos casos: para la muestra en el año 2000 para la muestra en el año 2005. También se ajustó un modelo catástrofe para el caso en el que se consideraron las dos muestras como una sola: 2000-2005.

Resultados para los datos del año 2000

Presentamos la siguiente tabla que contiene los p-valores para cada variable, cuando se consideró solamente su efecto en el modelo catástrofe correspondiente.

P-valores de las variable control para el año 2000 en el modelo catástrofe

	X	CH	CA	EA
G_1	$2.24098e - 010$	0.93464	0.04459	0.00383
G_2	$2.426555e - 009$	0.77179	0.05788	0.01538
G_3	$1.301118e - 009$	0.53210	0.04373	0.03411

A partir de la tabla anterior se observa que las variables control que tienen un impacto de manera individual en el contexto del modelo catástrofe son: índice de ingreso (X), crían animales (CA) y elaboran alimentos de autoconsumo (EA). Presentaremos en las figuras 4.9, 4.10 y 4.11 lo que hemos denominado la proyección de la superficie catástrofe bajo el modelo en el que solamente consideramos la acción de la variable control *índice de ingreso* (X). Esta proyección es la gráfica del punto catástrofe Y, bajo el nivel de la variable control *índice de ingreso* (X). Retomando la notación del capítulo 3, la expresión (3.12)

$$f(y|x) = \xi(\beta) \exp \left[- \int^y \frac{g(s)}{v(s)} ds \right]$$

es la forma general de nuestra densidad, en donde $g(y) = \beta_0 + \beta_1 y + \dots + \beta_k y^k$ es nuestro polinomio de forma y $\beta_i = \beta_{i1} + \beta_{i2} x$, de nuestro modelo catástrofe. Luego, lo que hemos denominado proyección catástrofe es la gráfica A, tal que

$$A = \left\{ (x, y) \mid g(y) = 0 \wedge \hat{\beta}_i = \hat{\beta}_{i1} + \hat{\beta}_{i2} x \right\}$$

4.1. UN ANÁLISIS ESTADÍSTICO, DENTRO DEL CONTEXTO DE TEORÍA DE CATÁSTROFES, DE UN PROBLEMA DE SALUD PÚBLICA DEL ESTADO DE NUEVO LEÓN

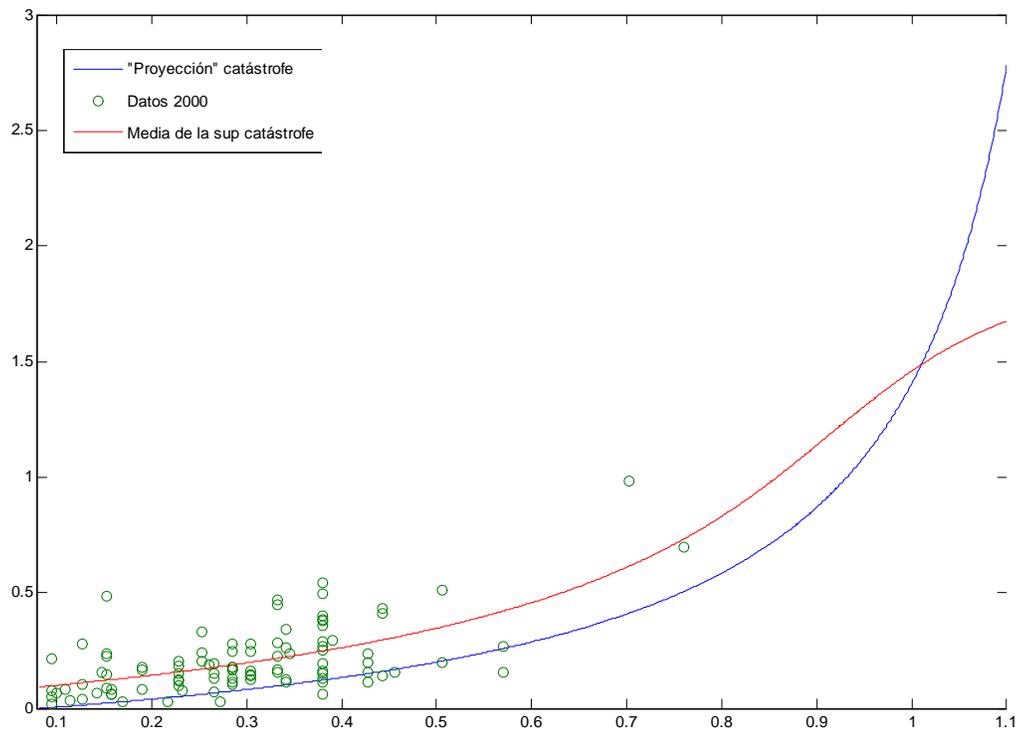


Figura 4.9: Proyección catástrofe del modelo G_1 para los datos del 2000, en donde únicamente se considera en el modelo la variable catástrofe X .

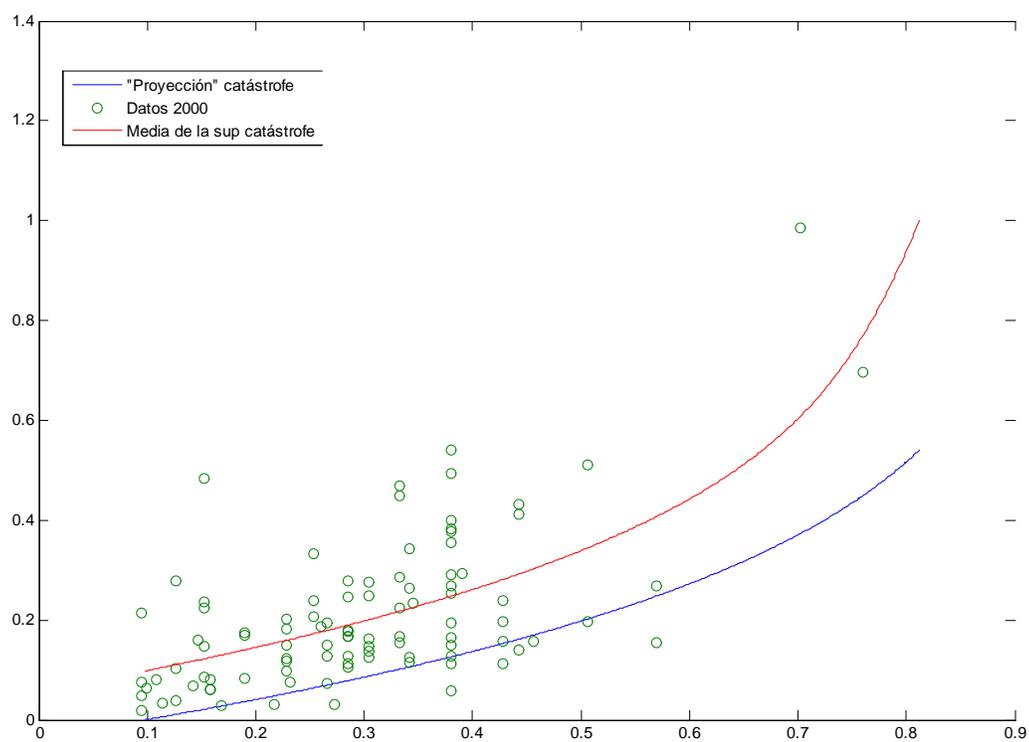


Figura 4.10: Proyección catástrofe del modelo G_2 para los datos del 2000, en donde únicamente se considera en el modelo la variable catástrofe X .

4.1. UN ANÁLISIS ESTADÍSTICO, DENTRO DEL CONTEXTO DE TEORÍA DE CATÁSTROFES, DE UN PROBLEMA DE SALUD PÚBLICA DEL ESTADO DE NUEVO LEÓN

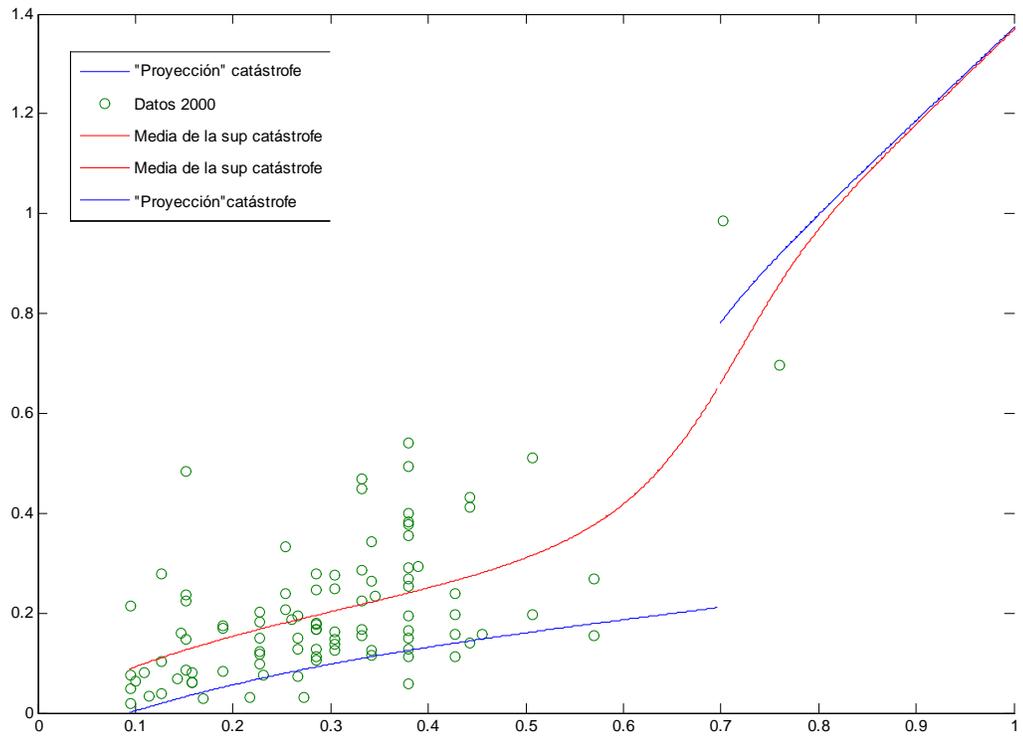


Figura 4.11: Proyección catástrofe del modelo G_3 para los datos del 2000, en donde únicamente se considera en el modelo la variable catástrofe X .

Siguiendo el procedimiento de selección de variables descrito en el capítulo 3, consideramos la variable que tiene el menor valor de la verosimilitud y continuamos incorporando al modelo la siguiente variable hasta que se satisface la regla de paro del algoritmo. De esta manera, la primera variable que se incorporó al modelo fue la variable CA y luego se consideró el modelo con dos variables control, que fueron CA y EA.

	CA-EA
G_1	0.00638
G_2	0.02173
G_3	0.05254

Vemos que la incorporación de la variable control EA en el modelo tiene significancia en todos los modelos catástrofe que estamos considerando. El siguiente paso fue incorporar la variable control índice de ingreso (X), puesto que fue la variable control, dentro de las que fueron significantes, que tuvo el valor de la verosimilitud más grande.

	CA-EA-X
G_1	$4.02181e - 005$
G_2	$3.60922e - 008$
G_3	$4.19768e - 008$

La incorporación de la variable control índice de ingreso (X) resultó significativa en todos los casos. En las figuras 4.12, 4.13 y 4.14 presentamos las proyecciones catástrofe para los modelos catástrofe G_1 , G_2 y G_3 en el caso en que se considera en el modelo la acción de las tres variables control que resultaron conjuntamente significativas.

4.1. UN ANÁLISIS ESTADÍSTICO, DENTRO DEL CONTEXTO DE TEORÍA DE CATÁSTROFES, DE UN PROBLEMA DE SALUD PÚBLICA DEL ESTADO DE NUEVO LEÓN

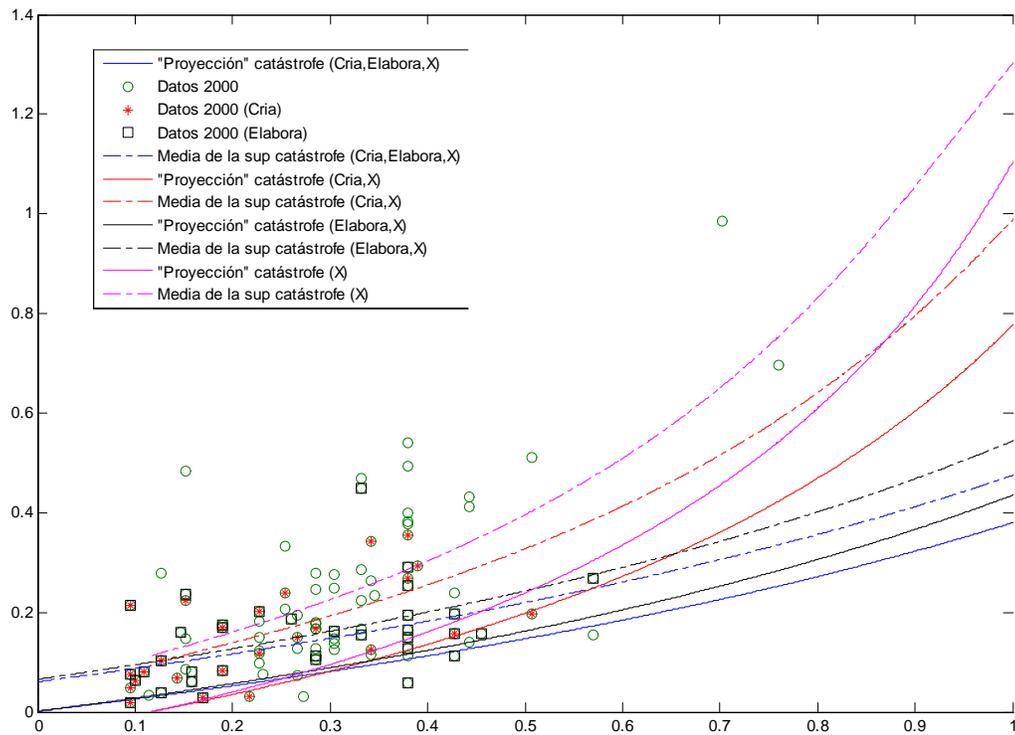


Figura 4.12: Proyección catástrofe del modelo G_1 para los datos del 2000, en donde se considera en el modelo la acción conjunta de las tres variables control que resultaron significativas: CA , EA y X .

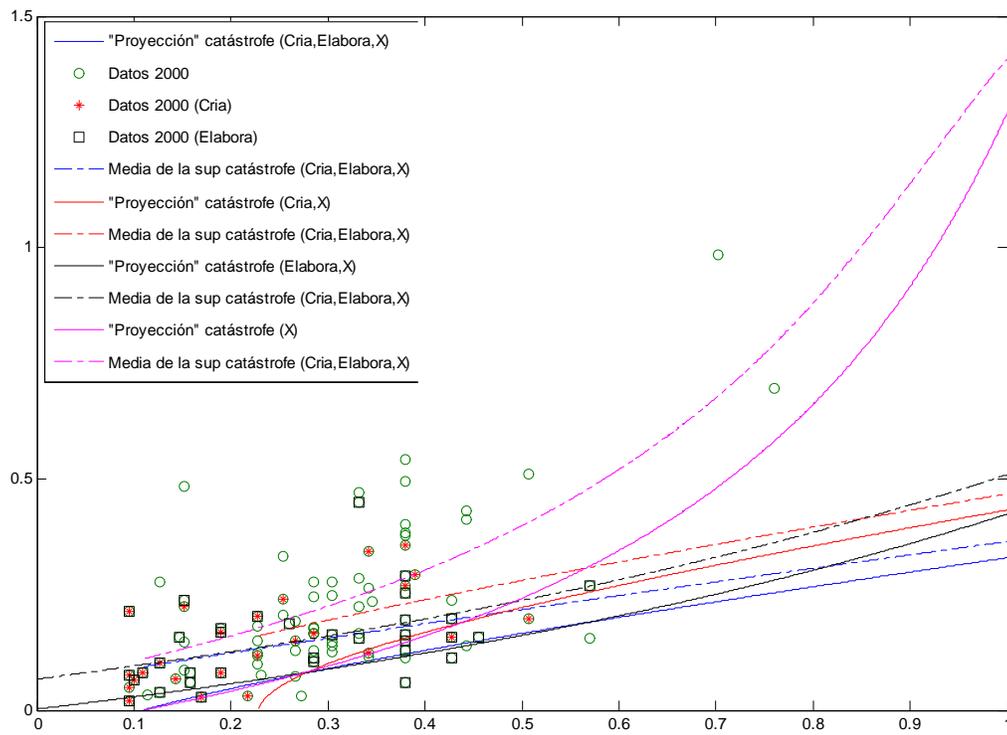


Figura 4.13: Proyección catástrofe del modelo G_2 para los datos del 2000, en donde se considera en el modelo la acción conjunta de las tres variables control que resultaron significativas: CA , EA y X .

4.1. UN ANÁLISIS ESTADÍSTICO, DENTRO DEL CONTEXTO DE TEORÍA DE CATÁSTROFES, DE UN PROBLEMA DE SALUD PÚBLICA DEL ESTADO DE NUEVO LEÓN

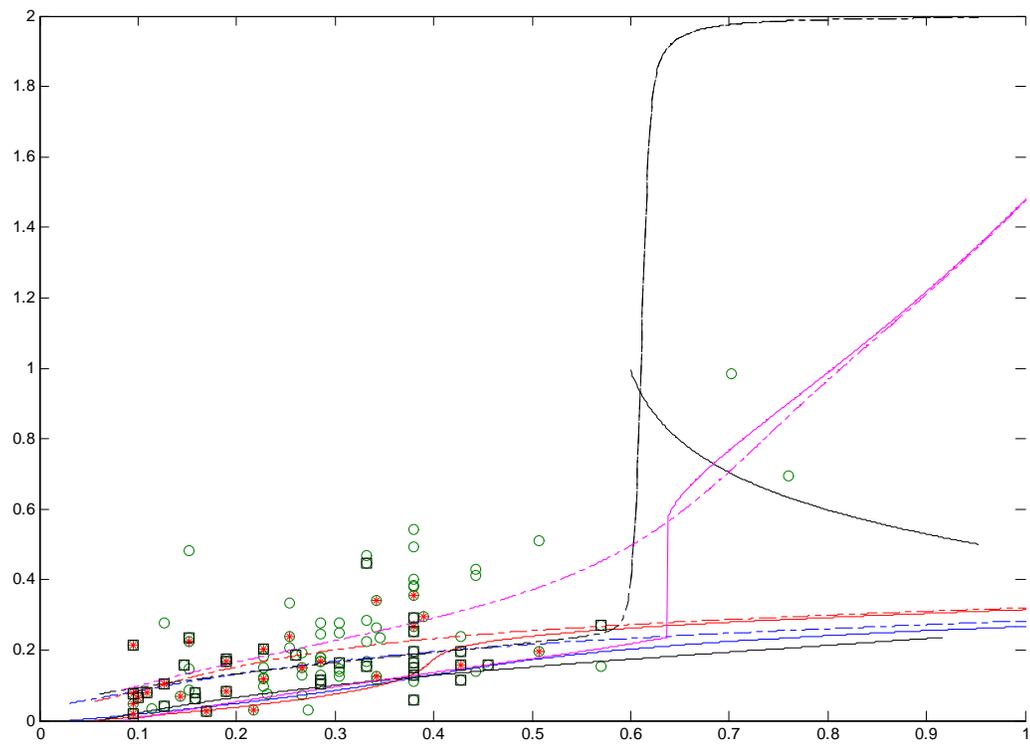


Figura 4.14: Proyección catástrofe del modelo G_3 para los datos del 2000, en donde se considera en el modelo la acción conjunta de las tres variables control que resultaron significativas: CA , EA y X .

Resultados para los datos del año 2005

Presentamos la siguiente tabla que contiene los p-valores para cada variable, cuando se consideró solamente su efecto en el modelo catástrofe correspondiente.

P-valores de las variable control para el año 2005 en el modelo catástrofe

	X	CH	CA	EA
G_1	$8.45432e - 004$	0.31508	0.86195	0.55844
G_2	0.001731	0.60709	0.84686	0.72137
G_3	$5.03010e - 004$	0.70933	0.45897	0.67451

A partir de la tabla anterior se observa que la única variable control que tiene un impacto de manera individual en el contexto del modelo catástrofe es índice de ingreso (X). De aquí que no se incorporará las información de las demás variables control al modelo. Presentaremos en las figuras 4.15, 4.16 y 4.17 lo que ya hemos presentado como las proyecciones catástrofe, ahora para los datos del año 2005 considerando únicamente a la variable control *índice de ingreso (X)*.

4.1.5 Conclusión de los resultados obtenidos

A partir de los resultados obtenidos se tienen observaciones importantes en los tres casos: para los datos del año 2000, 2005 y cuando se consideran las dos muestras como una. Es importante, al momento de la interpretación de los resultados, tener en cuenta la finalidad de los modelos catástrofe: detectar puntos o configuraciones en el plano de las variables control para las cuales existe un cambio abrupto en el comportamiento de la variable que se consideró como respuesta y la capacidad de poder predecir futuras respuestas a distintos

4.1. UN ANÁLISIS ESTADÍSTICO, DENTRO DEL CONTEXTO DE TEORÍA DE CATÁSTROFES, DE UN PROBLEMA DE SALUD PÚBLICA DEL ESTADO DE NUEVO LEÓN

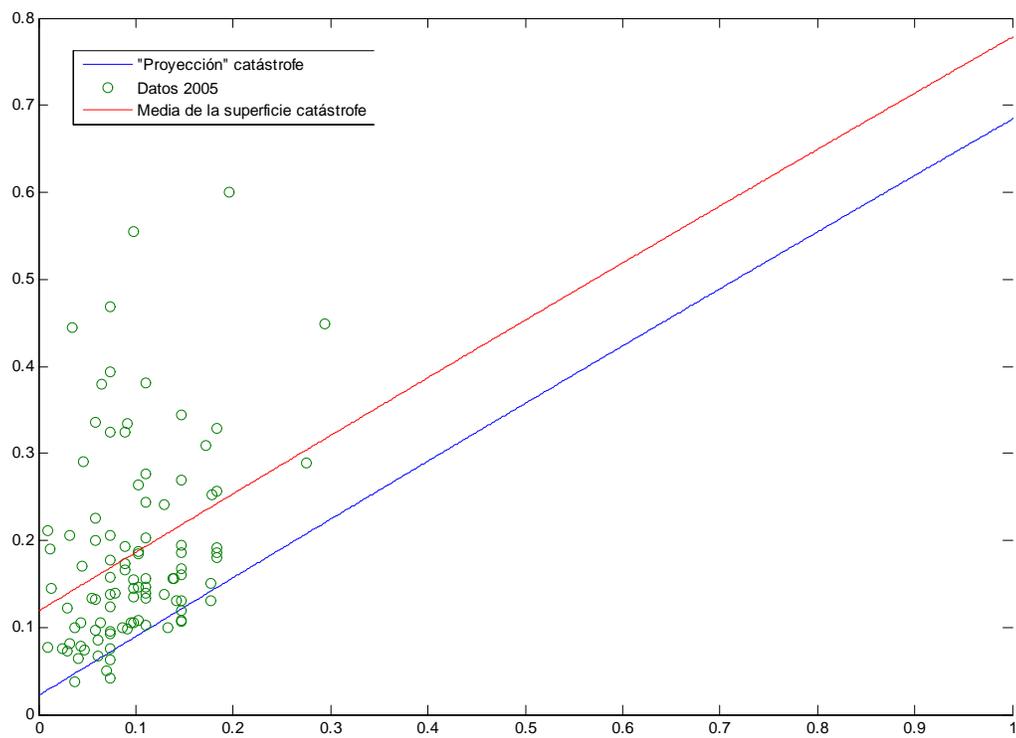


Figura 4.15: Proyección catástrofe del modelo G_1 para los datos del 2005, en donde únicamente se considera en el modelo la variable catástrofe X .

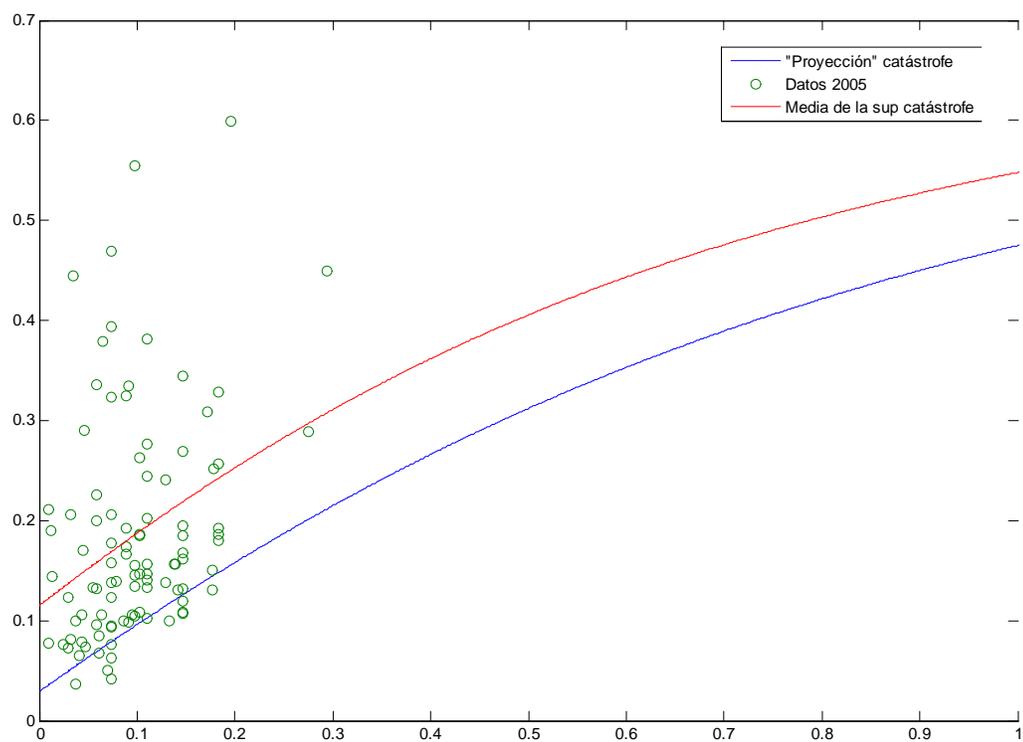


Figura 4.16: Proyección catástrofe del modelo G_2 para los datos del 2005, en donde únicamente se considera en el modelo la variable catástrofe X .

4.1. UN ANÁLISIS ESTADÍSTICO, DENTRO DEL CONTEXTO DE TEORÍA DE CATÁSTROFES, DE UN PROBLEMA DE SALUD PÚBLICA DEL ESTADO DE NUEVO LEÓN

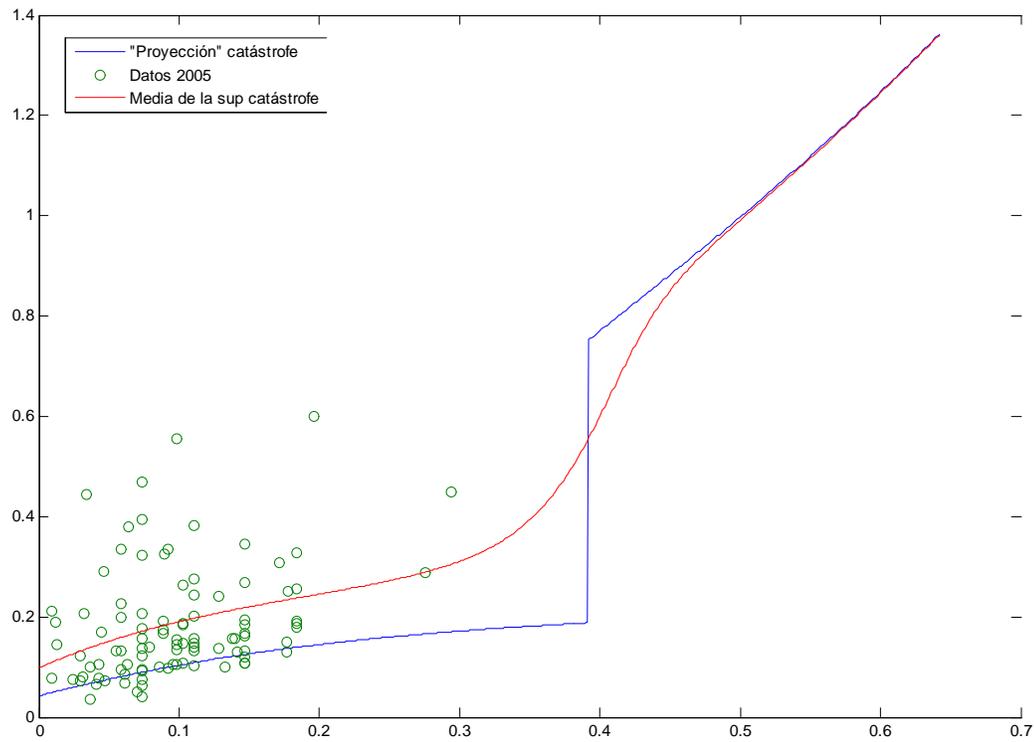


Figura 4.17: Proyección catástrofe del modelo G_3 para los datos del 2005, en donde únicamente se considera en el modelo la variable catástrofe X .

niveles de las variables control. Estas son dos propiedades que caracterizan la finalidad de los modelos catástrofe.

Conclusión para los datos del año 2000

Para el caso en el que únicamente se considera la variable control *índice de ingreso* (X), los modelos catástrofe G_1 y G_2 detectan un comportamiento creciente tanto en la media de la población (lo que se denotó en la gráfica como media de la superficie catástrofe) como en la moda de la población (lo que se denotó como proyección de la superficie catástrofe). Esto puede tener tres interpretaciones:

▷ Si el monto del salario mínimo crece, se tendría un mayor poder adquisitivo, implicando un posible incremento en el consumo de calorías.

▷ Si se tiene una mejor planificación familiar, el consumo de calorías por familia tendería a crecer.

▷ Si más elementos de la familia pueden contar con un trabajo remunerado, el salario familiar aumentaría y por ende el consumo de calorías de la familia.

Para el caso en el que se consideró el modelo catástrofe G_3 , se tienen las mismas conclusiones. Sin embargo, el modelo presenta un cambio abrupto en la respuesta, lo que nos quiere decir que se detecta un punto catástrofe en los rangos de la variable *índice de ingreso* (X) que se han registrado. Esto lo podemos ver en la figura (??). En el contexto de la modelación de catástrofes se registró un punto catástrofe. Esto tiene una repercusión en el comportamiento de la variable Y , que es discontinua y creciente. Desde un punto de vista estadístico, en una vecindad cercana a este punto catástrofe se presenta una bimodalidad en la densidad G_3 , lo que nos da como resultado dos poblaciones respecto al comportamiento de la Y . Veamos:

4.1. UN ANÁLISIS ESTADÍSTICO, DENTRO DEL CONTEXTO DE TEORÍA DE CATÁSTROFES, DE UN PROBLEMA DE SALUD PÚBLICA DEL ESTADO DE NUEVO LEÓN

para este caso se tiene que el modelo catástrofe G_3 detecta la existencia de dos posibles poblaciones. La primera población sería la que se encuentra entre

$$X \in [0.1, 0.7)$$

y la segunda sería la que se encontraría en el caso

$$X \geq 0.7$$

El rango de valores de la respuesta (Y) para la primera población estaría entre

$$Y \in [0.1, 0.6)$$

y para la segunda sería

$$Y \geq 0.8.$$

Esto es algo a destacar. Si de alguna manera se pudiera conjuntar en las familias, el tener una mejor planificación familiar, un incremento en los salarios y un incremento en las ofertas y demandas de trabajo, se pudo haber incrementado para ese año la ingesta de calorías por familia, a tal grado de que se pudo haber llegado cerca del consumo mínimo de calorías requerido para no ser considerado en estado de desnutrición.

Para el caso en el que se consideraro el modelo completo, con las variables: CA, EA y X todas las variables resultaron significativas. Se presentaron en las figuras (??), (??) y (??) las proyecciones catástrofe de estos modelos. Se puede observar un comportamiento que se resalta. Si no se considera en el modelo la acción de las variables CA y EA, y nada mas se considera el impacto de X, se tiene que el comportamiento que describe la población en media es mejor que cuando se considera la acción de las variables CA y EA, en los tres casos.

Para el caso del modelo G_3 se tiene lo siguiente: existe un punto el punto catástrofe, donde se observa que existe el cambio abrupto. En este caso, se detecta un cambio con una rapidez mayor a la que se registraría normalmente en una vecindad del punto

$$X = 0.63.$$

Todo lo anterior nos sugiere lo siguiente:

▷ Analicemos el comportamiento singular: si no se considera en el modelo la acción de las variables CA y EA, se tiene que el comportamiento en media de la población es mucho mejor que cuando se considera la acción de las variables CA y EA.

Cuando no consideramos ninguna variable categórica que resultó significativa, CA o EA, consideramos todo el elemento de la población bajo las mismas condiciones. El comportamiento que tiene toda la población es creciente y el modelo catástrofe detecta el comportamiento de las dos familias que tuvieron el mayor índice Y a los valores mas grandes de X . Cuando incorporamos una variable categórica en el modelo, por ejemplo CA, éste dará mayor peso a las familias que tienen la capacidad de poder realizar la actividad CA, que las que no. Debido a que el comportamiento en este caso respecto a la variable Y resulta ser homogéneo sin importar el valor de X , a partir de la información disponible el modelo no detecta un comportamiento que indique que existirá un quiebre o un punto catástrofe que nos subirá el índice Y de la población.

▷ Para elevar el estado nutricional de las familias, se podrían, establecer programas de orientación de queAnálogamente para cuando se incorpora la variable categórica EA. Lo anterior tiene sentido por lo siguiente: lo que nos esta diciendo es que; el que una familia tenga la capacidad de contar con el recurso de CA o de EA o de ambos, no cuentan

con el manejo que se requiere para poder explotar al máximo dicha capacidad. Tenemos que considerar que la disponibilidad de recursos económicos de estas familias es muy baja, y el tener que mantener en buenas condiciones animales para consumirlos o el elaborar alimentos de autoconsumo cuesta dinero. Lo que podemos concluir es que en el año 2000, faltó orientación respecto a como criar los animales o también qué alimentos son los que les brindarán una mayor ingesta calórica. alimentos de autoconsumo preparar, qué hortalizas cultivar y cómo brindar asesoría acerca de cuáles animales criar para autoconsumo.

▷ Se observar también los mismos puntos que se pudieron concluir para el caso en el que nada mas se considera como variable control *índice de ingreso* (X).

Conclusión para los datos del año 2005

Para este caso, únicamente se obtuvo que la variable *índice de ingreso* (X) fue significativa bajo los modelos G_1 , G_2 y G_3 . En los tres casos detecta un comportamiento creciente tanto en la media de la población como en la moda de la población . Esto puede tener las mismas tres interpretaciones que se obtuvieron para el caso del año 2000:

▷ Si el monto del salario mínimo crece, se tendría un mayor poder adquisitivo, implicando un posible incremento en el consumo de calorías.

▷ Si se tiene una mejor planificación familiar, el consumo de calorías por familia tendería a crecer.

▷ Si más elementos de la familia pueden contar con un trabajo remunerado, el salario familiar aumentaría y por ende el consumo de calorías de la familia.

El caso en el que se consideró el modelo catástrofe G_3 , se tienen las mismas conclusiones. Sin embargo, para este caso existe un cambio abrupto en la respuesta, lo que nos quiere decir

que se detecta un punto catástrofe en los rangos de la variable *índice de ingreso* (X). Esto es importante, puesto que aquí se explota una de las finalidades de los modelos catástrofe, ver figura (??). Podemos pronosticar un cambio abrupto en el comportamiento de la variable respuesta. Si se eleva el nivel de la variable control *índice de ingreso* (X) a un nivel de 0.4 en adelante, tenemos que se elevaría el nivel nutricional de las familias respecto a la ingesta calórica mínima para no ser consideradas a un nivel de tan baja desnutrición.

4.2 Un análisis alternativo, bajo un contexto clásico estadístico

La idea de esta sección es brindar una manera clásica de proceder para tratar los datos que estamos trabajando. La manera clásica que se presentará será la aplicación de un modelo lineal generalizado. Este modelo en cuestión será el Gamma. Lo anterior en base a la sección 4.1.2, en donde se realizó un análisis descriptivo de los datos para el año 2000, 2005 y para la muestra conjunto del 2000-2005. El objetivo es modelar el comportamiento medio de la respuesta, considerando una o varias variables independientes, que en el caso de los modelos catástrofe se denominan variables control. Igual que en los modelos catástrofe, una de las finalidades de los modelos lineales generalizados, es predecir a distintos niveles de las variables independientes el comportamiento de la variable respuesta, pero en este caso se predice el valor esperado.

Presentaremos el análisis de los datos que se realizó, para los tres casos que se consideraron.

4.2.1 Análisis para el año 2000

Para la aplicación del modelo lineal generalizado, se consideró en el modelo las cuatro variables independientes con que contamos: X , CA , EA y CH y como variable respuesta Y . Se presenta a continuación los resultados de dicho análisis.

Parámetro	Valor	P-valor
<i>Intercepto</i>	6.3929	$4.065e - 045$
X	-7.1057	$1.1792e - 014$
CA	1.393	0.07486
EA	2.1597	0.0019078
CH	-0.26253	0.60906

Observamos que las variables X , CA y EA que resultaron significantes en el modelo lineal generalizado, son las mismas variables que resultaron significativas en el contexto del modelo catástrofe para el mismo caso. Una manera de corroborar el ajuste del modelo lineal generalizado es analizar los residuales devianza. Estos residuales se deben de ajustar en $Q - Q$ plot a una normal estándar. En la figura 4.30 se presenta dicha gráfica

Se observa que el ajuste del modelo es aceptable, lo que nos da confianza para no rechazar el modelo lineal generalizado. En la figura 4.31 se presenta la gráfica del modelo

A partir de la gráfica 4.31 se observan los mismos resultados que en el caso del modelo catástrofe. Se tiene un mejor rendimiento si únicamente consideramos en el modelo la variable independiente X . Al parecer se tiene un rendimiento menor de la variable respuesta si se consideran las demás variables en el modelo. De aquí que podemos llegar a las mismas conclusiones que en el caso catástrofe.

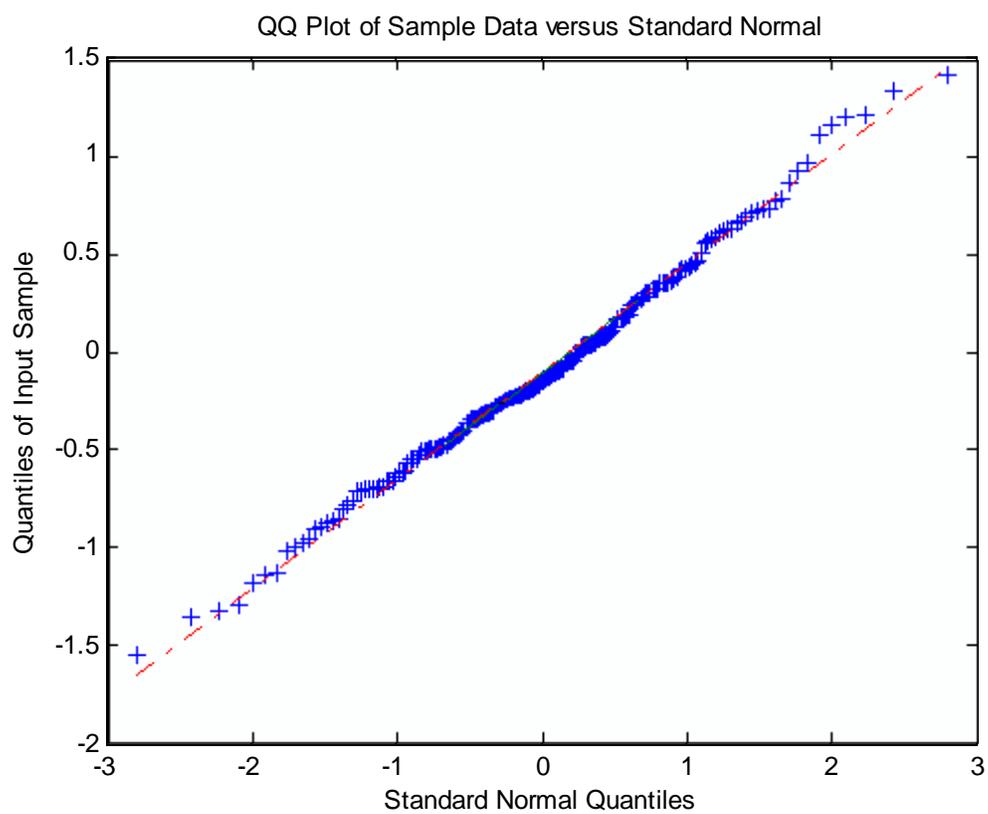


Figura 4.18: Gráfica $Q - Q$ de los residuales devianza para el caso del año 2000.

4.2. UN ANÁLISIS ALTERNATIVO, BAJO UN CONTEXTO CLÁSICO ESTADÍSTICO

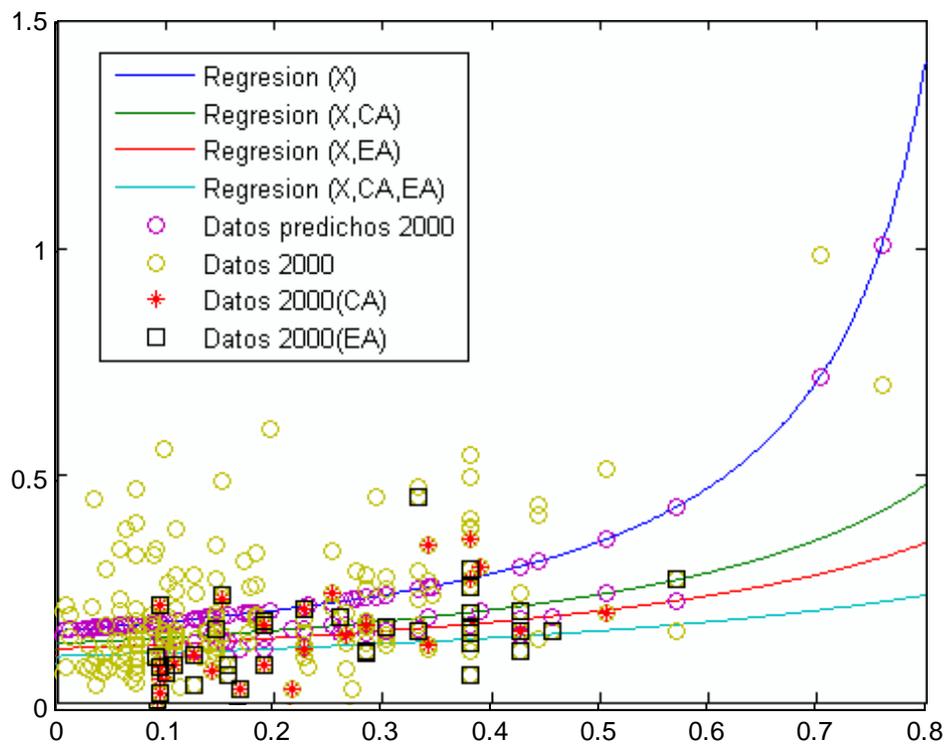


Figura 4.19: Gráfica del modelo lineal generalizado para el año 2000.

4.2.2 Análisis para el año 2005

Se consideraron, igual que en el caso anterior, las cuatro variables independientes con que contamos: X , CA , EA y CH y como variable respuesta Y . Se presenta a continuación los resultados de dicho análisis.

Parámetro	Valor	P-valor
<i>Intercepto</i>	7.3955	$4.8805e - 015$
X	-17.192	0.00046529
CA	-1.1711	0.15195
EA	0.70106	0.26745
CH	-0.57821	0.41335

Observamos que en este caso la variable independiente *índice de ingreso* (X) resultó ser significativa, al igual que en el modelo catástrofe, en el que la única variable significativa fue la variable *índice de ingreso* (X). Esto es algo peculiar. Para los dos paradigmas, las mismas variables resultan ser significativas. Corroboremos el ajuste del modelo lineal generalizado analizando los residuales devianza. Estos residuales, como ya mencionamos se deben de ajustar en $Q - Q$ plot a una normal estándar. En la figura 4.32 se presenta dicha gráfica

Se observa que el ajuste del modelo es aceptable, lo que nos da confianza para no rechazar el modelo lineal generalizado. En la figura 4.33 se presenta la gráfica del modelo

De la gráfica 4.33 se observan los mismos resultados que en el caso del modelo catástrofe. De aquí que podemos llegar a las mismas conclusiones que en el caso catástrofe. Hay que resaltar lo que se observó: se tiene el mismo rendimiento en cuestión de modelos, respecto a las variables independientes. Tanto para el caso 2000 como en el 2005, las variables que son

4.2. UN ANÁLISIS ALTERNATIVO, BAJO UN CONTEXTO CLÁSICO ESTADÍSTICO

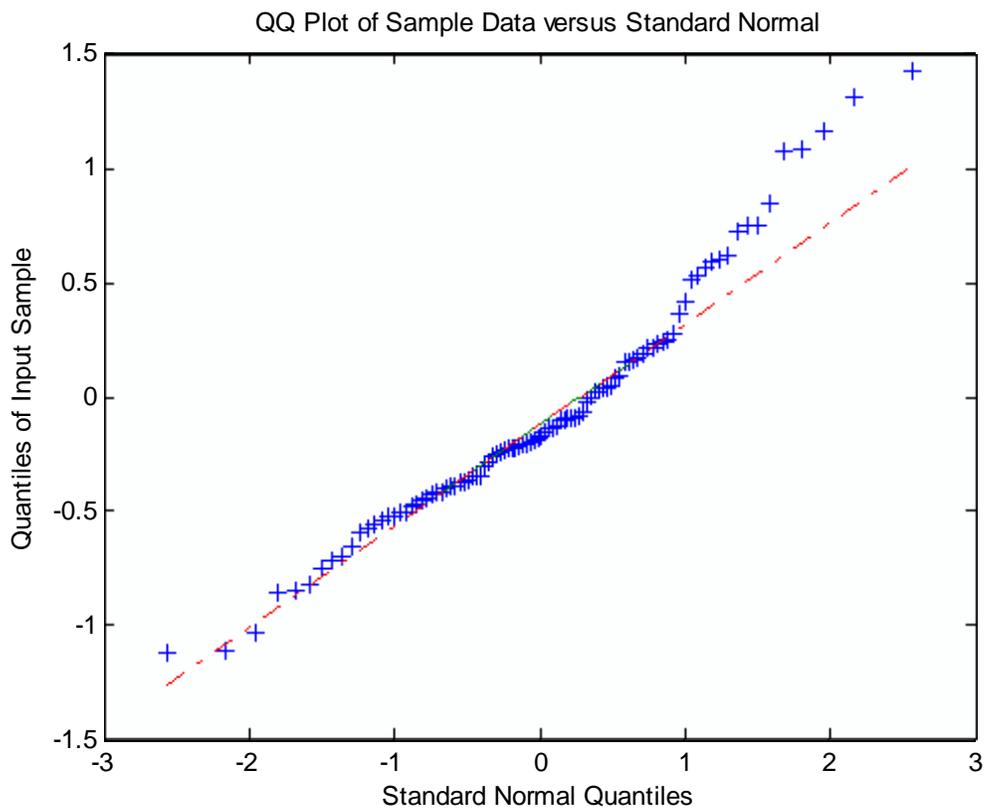


Figura 4.20: Gráfica $Q - Q$ de los residuales devianza para el caso del año 2005.

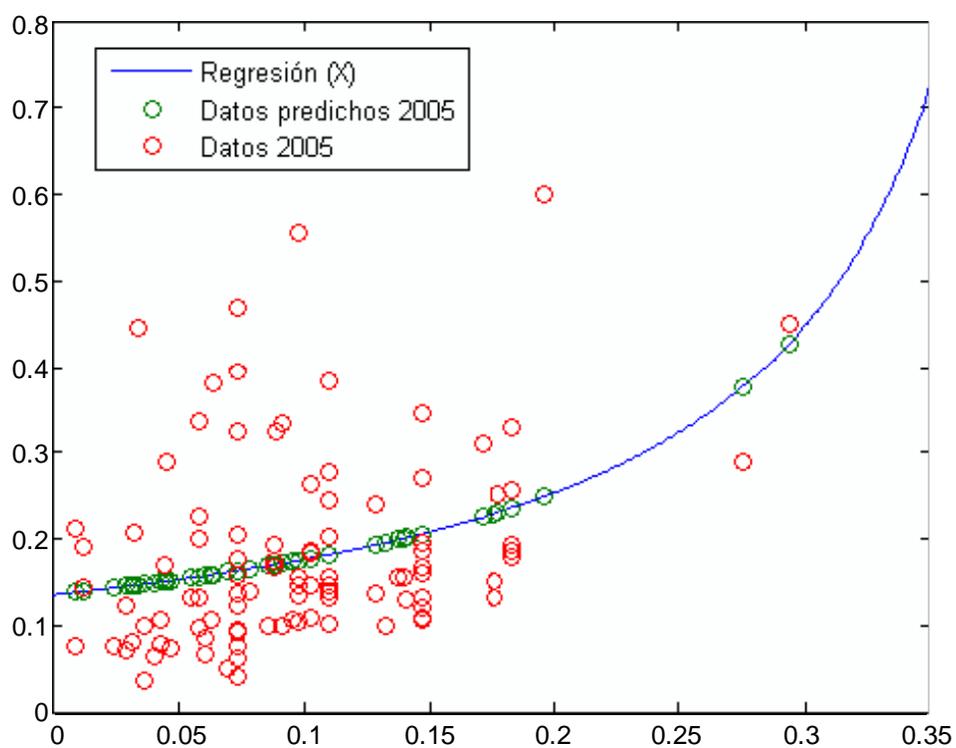


Figura 4.21: Gráfica del modelo lineal generalizado para el año 2005.

4.2. UN ANÁLISIS ALTERNATIVO, BAJO UN CONTEXTO CLÁSICO ESTADÍSTICO

significantes bajo los dos paradigmas son las mismas.

4.2.3 Conclusiones del análisis

Existen algunas cosas a resaltar de la aplicación de este método clásico de análisis estadístico. Una de ellas, es la similitud con el modelo catástrofe, de variables que resultaron significativas. Esta similitud, entre una versión clásica y el método catástrofe hace resaltar las "buenas" propiedades o características predictivas de los modelos catástrofes.

4.2.4 Comparación del rendimiento predictivo con los modelos catástrofe

No existe una manera fácil ni canónica de comparar modelos estadísticos no anidados. Teniendo esta dificultad, podemos ver en el horizonte las complicaciones que se nos presentarán al comparar modelos que no fueron concebidos bajo la misma estructura filosófica. Sin embargo, en nuestro contexto tenemos algo muy favorable de nuestra parte. Tanto los modelos lineales generalizados como los modelos catástrofe tienen dentro de su gama de finalidades el predecir respuestas a distintos niveles de las variables independientes o control. Esto sugiere realizar una comparación del "rendimiento" predictivo que tienen estos modelos. La manera que se ha implementado en este trabajo para comparar dicho rendimiento predictivo, es haciendo uso, en parte, de validación cruzada.

Descripción del procedimiento

Se estableció el rendimiento predictivo de los modelos de la siguiente manera

$$RP = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2,$$

una suma de cuadrados ponderada, en donde y_i es la respuesta observada y \hat{y}_i es la respuesta predicha.

El método se describe a continuación

▷ Se procede a remover de la muestra una o un grupo de observaciones. Se considera ahora como la muestra, a la muestra original menos las observaciones removidas

▷ Con la muestra con que nos quedamos, se estima el modelo con el que estemos trabajando

▷ Se estima o se estiman las observaciones que fueron removidas y se calcula el sumando correspondiente de RP .

▷ Se repiten los pasos 1 a 3 hasta que se hayan estimados todos los elementos de la muestra.

Hay que esclarecer cuando se remueve un grupo de observaciones, los grupos de forman de manera aleatoria.

Resultados para el año 2005

A continuación se presentan los resultados del procedimiento de comparación. Se presentan en la siguiente tabla los resultados de RP para el año 2005 para los modelo G_1 y G_2 junto con el valor RP para el modelo lineal.

4.2. UN ANÁLISIS ALTERNATIVO, BAJO UN CONTEXTO CLÁSICO ESTADÍSTICO

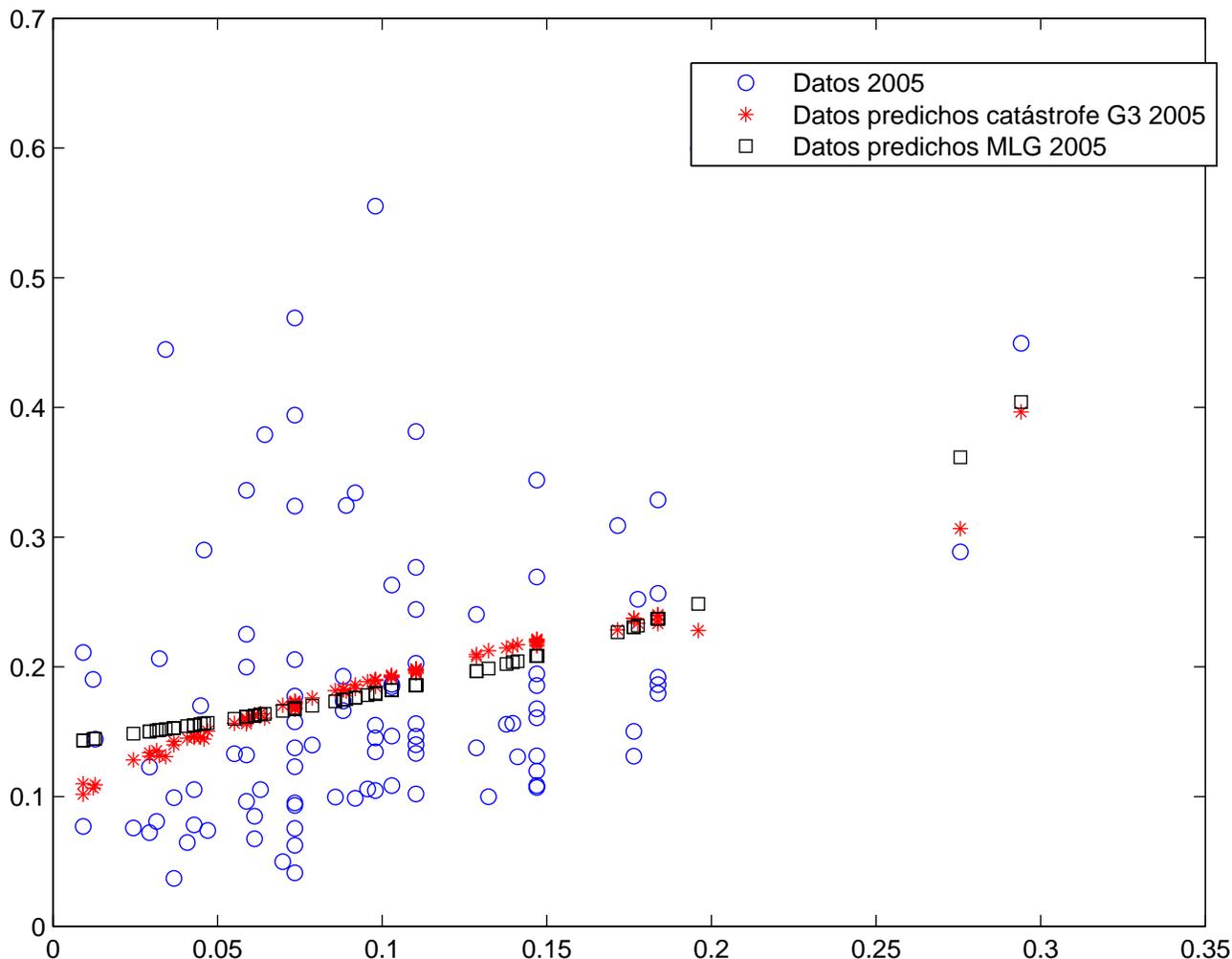


Figura 4.22: Gráfica en la que se presentan los datos para el año 2005 junto con las predicciones realizadas con G_2 y MLG

Modelo	Valor RP
G_1	0.011646
G_2	0.011690
MLG	0.010837

Podemos observar que, en comparación, los modelos catástrofe con los MLG , son prácticamente equivalentes en cuestión de predicción. Podría establecerse que el modelo lineal

generalizado tiene un mejor rendimiento predictivo, mas es muy leve esta ventaja.

Resultados para el año 2000

A continuación se presentan los resultados del procedimiento de comparación entre los modelos lineales generalizados y los modelos catástrofe. Se presentan en la siguiente tabla los resultados de RP para el año 2000 para los modelo G_1 y G_2 junto con el valor RP para el modelo lineal.

Modelo	Valor RP
G_1	0.0144094
G_2	0.0183922
MLG	0.0153222

Podemos observar que, en comparación, los modelos catástrofe con los MLG , son prácticamente equivalentes en cuestión de predicción. Podría establecerse en este caso que el modelo G_1 tiene un mejor rendimiento predictivo que el modelo G_2 o que el modelo lineal generalizado.

4.2. UN ANÁLISIS ALTERNATIVO, BAJO UN CONTEXTO CLÁSICO ESTADÍSTICO

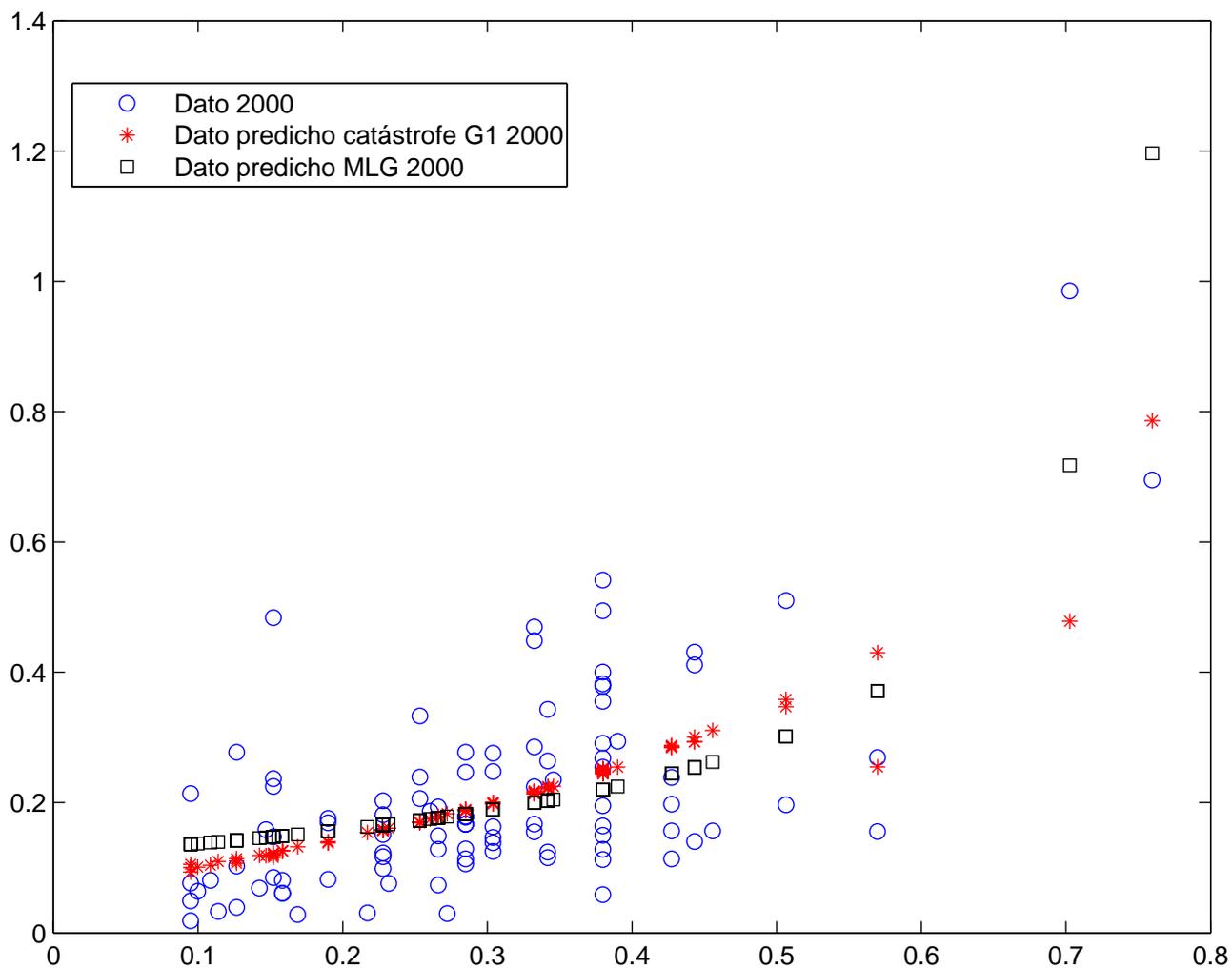


Figura 4.23: Gráfica en la que se presentan los datos para el año 2000 junto con las predicciones realizadas con G_1 y MLG

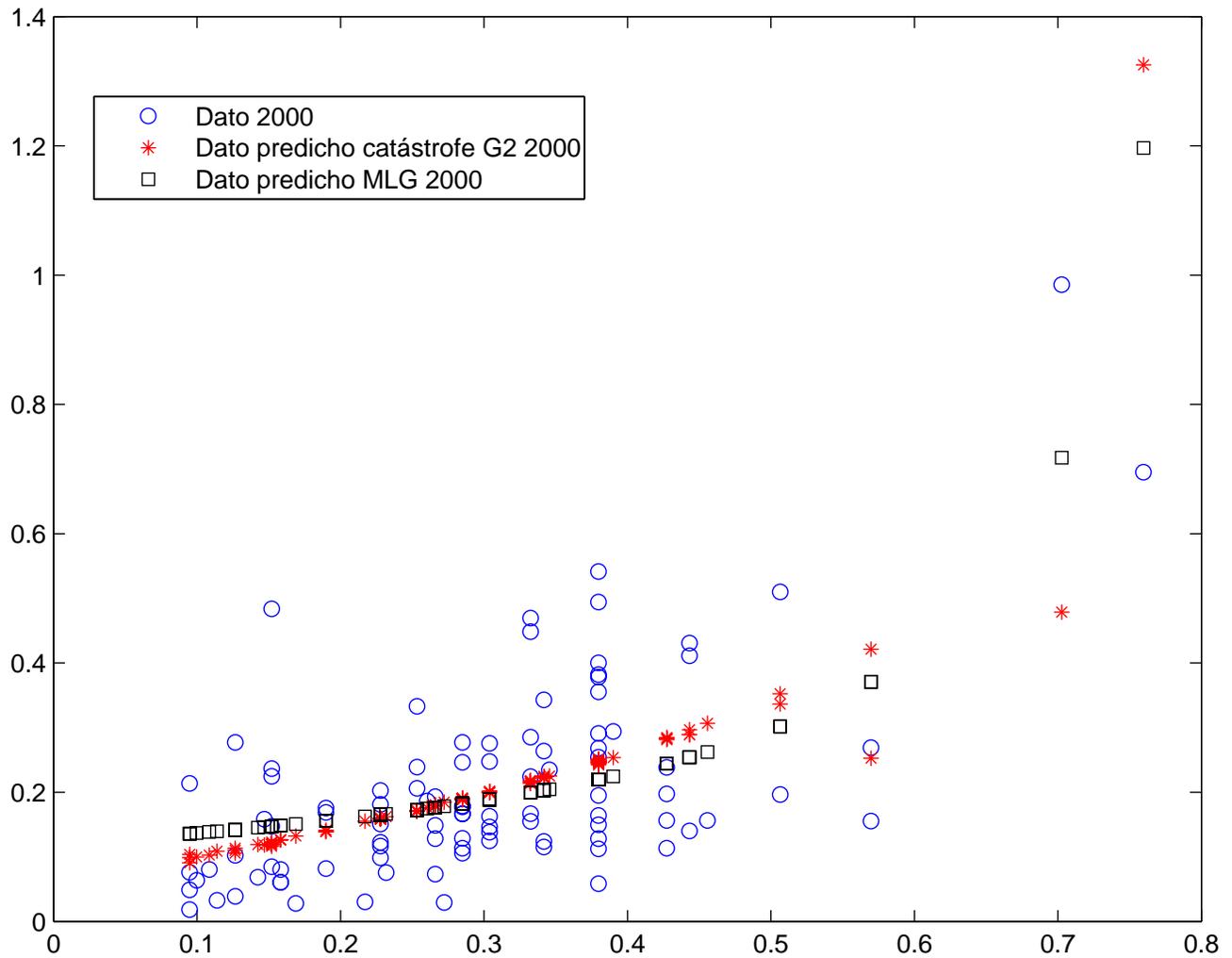


Figura 4.24: Gráfica en la que se presentan los datos para el año 2000 junto con las predicciones realizadas con G_2 y MLG

4.2. UN ANÁLISIS ALTERNATIVO, BAJO UN CONTEXTO CLÁSICO ESTADÍSTICO

Capítulo 5

Conclusión

De lo descrito en este trabajo es importante notar que, como toda teoría, cuando se "toma prestada " para describir otra clase de fenómenos, la teoría de catástrofes puede tener ventajas y desventajas. Las ventajas de la aplicación de este modelo giran alrededor de su capacidad predictiva, el poder explotar la capacidad de describir las tendencias de los datos de manera que reflejan más fielmente la dinámica del problema, como se puede apreciar en los análisis del año 2000 y 2005. La capacidad intrínseca de pronosticar valores en la *variable control del experimento* para los cuales existe un cambio abrupto, lo convierte en una herramienta útil en la toma de decisiones. Estos puntos deberán de ser entendidos como pronósticos de un comportamiento acelerado, en la variable que se ha establecido como respuesta, mas rápido que lo normal en un lapso de tiempo corto, relativo al tiempo en el que se desarrollan los eventos en el experimento a seguir. La ruptura de las superficies catástrofe matemáticamente dicen que los puntos intermedios de esta ruptura son inexistentes, pero la interpretación que se hace en la práctica es el punto en donde no se tendría la capacidad para dar respuesta, por ejemplo en una epidemia, o a partir del cuál podrías tener la situación bajo

control, etc. etc. y son las distancias relativas a estos puntos las que resultan fundamentales para la toma de decisiones, fundamentalmente en el área de salud pública.

Por otra parte la capacidad predictiva de los modelos catástrofe es comparable con uno de los modelos clásicos de la estadística. Se obtienen resultados satisfactorios respecto a las predicciones que realizan los modelos catástrofe. Esto fue comprobado mediante el procedimiento denominado rendimiento predictivo, esto es importante de mencionar porque regularmente los puntos de quiebre de las superficie, principal contribución del modelo de ctástrofes, se presentan bajo extrapolaciones.

La principal desventaja de los modelos catástrofe es la certidumbre de la existencia de los catástrofe o los puntos de ruptura de la superficie catástrofe. Resulta difícil cuantificar la certidumbre de la existencia de estos puntos, debido a que estos modelos no son estadísticos. La manera en que se establece el sentido de la existencia de estos puntos deberá ser estableciendo el sentido que tienen en el experimento.

Se requieren rutinas específicas para implementar los algoritmos de estimación, vía máxima verosimilitud, y quedan muchos puntos por estudiar en cuánto a intervalos tipo bootstrap, por mencionar solo uno de ellos.

Bibliografía

- [1] Arnold, V. I. (2004). *Catastrophe Theory*. 3rd Edition. Springer-Verlag.
- [2] Auer, J. W. (1980). Mathematical Preliminaries to Elementary Catastrophe Theory. *Mathematics Magazine*. Vol. **53**, No.1, 13-20.
- [3] Cobb, L. (1980). Estimation Theory for the Cusp Catastrophe Model. *Proceedings of the Section of Survey Research Methods, Washington, D. C.: American Statistical Association*. 772-776.
- [4] Cobb, L. (1981). Stochastic Differential Equations for the Social Sciences. *Mathematical Frontiers of the Social and Policy Sciences*. Chapter 2. Westview Press.
- [5] Cobb, L., Koppstein, P. & Chen, N. H. (1983). Estimation and Moment Recursion Relations for Multimodal Distributions of the Exponential Family. *Journal of the American Statistical Association*. Vol. **78**, No.381, 124-130.
- [6] Cobb, L. & Zacks, S. (1985). Applications of Catastrophe Theory for Statistical Modeling in the Biosciences. *Journal of the American Statistical Association*. Vol. **80**, No.392, 793-802.

-
- [7] Hartelman, P., Savelsbergh, G. J. P., Van der Kam, J. & Wimmers, R. H. (1998). A Developmental Transition in Prehension Modeled as a Cusp Catastrophe. *Developmental Psychobiology*. Vol. **32**, No.1, 23-35.
- [8]. Herstein, I. N.(1986). *Algebra abstracta*. Grupo Editorial Iberoamérica.
- [9] Oliva, T. A., Desarbo, W. S., Day, D. L. & Jedidi, K. (1987). GEMCAT: A General Multivariate Methodology for Estimating Catastrophe Models. *Behavioral Science*. Vol. **32**, 121-137.
- [10] Poston, T. & Stewart, I. (1996). *Catastrophe Theory and its Applications*. Dover Publications, Inc.
- [11] Zeeman, E. C. (April 1976). Catastrophe Theory. *Scientific American*, 65-83.